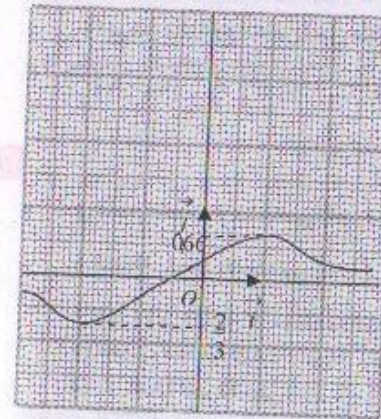


- من أجل أي قيمة لـ  $\theta$  تكون مساحة المستطيل اعظمية ؟

42

لتكن  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  وقابلة للاشتقاق مرتين على  $\mathbb{R}$  والدالة  $f''$  منحناها البياني كما هو موضح في الشكل المجاور.  
من أجل كل معلومة من المعلومات التالية ما هي الصحيحة والخاطئة منها ؟



(1)  $f$  تقبل قيمة صغرى من أجل  $x = \frac{-1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1} = 0 \quad (2)$$

(3)  $f$  متناقصة تماما على  $[1, +\infty[$

(4) إذا كان  $f(-2) = 1$

فإنه من أجل كل  $x \in [-2, 1]$  يكون  $f(x) \geq 1$

(5) معادلة المماس لـ  $(C_f)$  عند النقطة

ذات الفاصلة -2 هي  $y = \frac{-2}{3}$ .

43

(1) لتكن  $g$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$

(أ) ادرس اتجاه تغير  $g$  على  $\mathbb{R}$ .

(ب) برهن أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$ ، ثم اعط حصرا لـ  $\alpha$  بتقريب  $10^{-1}$  بالزيادة. و عين إشارة  $g(x)$  حسب قيم  $x$ .

(2) لتكن  $f$  دالة معرفة على  $]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$  بـ  $f(x) = \frac{1}{3} \left( x^2 + x + \frac{1}{x} \right)$

(أ) برهن أن من أجل كل  $x \neq 0$  إشارة  $f'(x)$  هي نفس إشارة  $g(x)$ .

(ب) ادرس اتجاه تغير  $f$  واحسب نهاية  $f$  عند  $0, +\infty, -\infty$ .

(ج) برهن أن  $f(\alpha) = \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{2\alpha}$  واستنتج حصرا للعدد  $f(\alpha)$ .

(3) نسمي  $(\gamma)$  التمثيل البياني للدالة  $f$  في معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(طول الوحدة 3cm) و لتكن  $I$  نقطة من  $(\gamma)$  فاصلتها -1 و  $J$  نقطة من  $(\gamma)$  فاصلتها 1.

(أ) تحقق أن المستقيم  $(IJ)$  مماس لـ  $(\gamma)$  عند  $J$ .

(ب) عين معادلة للمماس  $(I')$  للمنحنى  $(\gamma)$  عند  $I$  ثم ادرس وضعية  $(\gamma)$  بالنسبة لهذا المماس.

(ج) باستعمال كل النتائج السابقة ارسم  $(\gamma)$  (تأخذ  $\frac{2}{3}$  كقيمة مقربة لـ  $\alpha$ ).

# 4

## الدرس

# الدالة الأسية

1. دراسة المعادلة التفاضلية  $f' = f$  مع  $f(0) = 1$

مثال -

تقبل أنه توجد دالة وحيدة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا  $f'(x) = f(x)$  و  $f(0) = 1$ .

نريد إنشاء المنحنى البياني التقريبي للدالة  $f$  باستعمال مجيول (طريقة أولر) على  $[-1, 1]$ .

(1) باستعمال التقريب التآلفي  $f(a+h) \approx f(a) + h \times f'(a)$

(أ) عين قيمة تقريبية لـ  $f(0,5)$  و  $f(1)$  بخطوة  $h = 0,5$

(ب) عين قيمة تقريبية لـ  $f(-0,5)$  و  $f(-1)$  بخطوة  $h = -0,5$

(2) على المجال  $[0, 1]$  نختار خطوة  $h = 0,1$  ونشكل متتالية النقاط

$M_n(x_n, y_n)$  حيث  $x_0 = 0$  و  $y_0 = 1$  و  $y_n = f(x_n)$

(أ) بين أن المتتالية  $(x_n)$  حسابية و  $(y_n)$  متتالية هندسية ثم اكتب  $x_n$  و  $y_n$  بدلالة  $n$ .

(ب) اعط القيمة التقريبية لـ  $y_n = f(x_n)$  مع  $10 \geq n \geq 0$  و  $n \in \mathbb{N}$ .

(ج) ارسم للمنحنى البياني التقريبي للدالة  $f$  على المجال  $[0, 1]$  في معلم متعامد

ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (طول الوحدة 0,1)



(3) على المجال  $[-1, 0]$  نختار خطوة  $h = -0,1$  ونشكل متتالية النقاط

$M_n(x_n, y_n)$  حيث  $y_n = f(x_n)$  و  $x_0 = 0$  و  $y_0 = 1$

(ا) اكتب  $x_n$  و  $y_n = f(x_n)$  بدلالة  $n$ .

(ب) اعط القيمة التقريبية لـ  $y_n = f(x_n)$  حيث  $10 \geq n \geq 0$

(ج) ارسم للنحنى البياني التقريبي للدالة  $f$  على المجال  $[-1, 0]$  في نفس للعلم السابق.

✓ الحل

(1) بما ان  $f'(a) = f(a)$  فإن  $f(a+h) \approx (1+h) \times f(a)$

$$f(0,5) = f(0+0,5) = (1+0,5)f(0) = 1,5 \times 1 = 1,5$$

$$f(1) = f(0,5+0,5) = (1+0,5)f(0,5) = 1,5 \times 1,5 = 2,25$$

$$f(-0,5) = f(0-0,5) = (1-0,5)f(0) = 0,5$$

$$f(-1) = f(-0,5-0,5) = (1-0,5)f(-0,5) = 0,5 \times 0,5 = 0,25$$

(2) (ا) النقطة  $M_0$  إحداثياتها  $(0, 1)$  والنقطة  $M_1$  إحداثياتها  $(x_1, y_1)$

$$\text{حيث } x_1 = x_0 + h \text{ و } y_1 = (1+h)y_0$$

النقطة  $M_2$  إحداثياتها  $(x_2, y_2)$  حيث  $x_2 = x_1 + h$  و  $y_2 = (1+h)y_1$  وهكذا دواليك

النقطة  $M_n$  إحداثياتها تحقق  $x_n = x_{n-1} + h$  و  $y_n = (1+h)y_{n-1}$  ومنه نستنتج ان  $(x_n)$

متتالية حسابية أساسها  $h$  و  $(y_n)$  متتالية هندسية أساسها  $(1+h)$ .

بما ان  $h = 0,1$  فإن  $x_n = x_0 + nh = 0,1n$  و  $y_n = y_0 \times (1+h)^n$  أي  $y_n = (1,1)^n$

(ب)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_n$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$y_n$	1	1,1	1,21	1,33	1,46	1,61	1,77	1,94	2,14	2,35	2,59

(ج) للنحنى التقريبي للدالة

$f$  مشكل من قطع

$$[M_k M_{k+1}]$$

حيث  $n-1 \geq k \geq 0$

$$M_k(0,1k, (1,1)^k)$$

(ا) المتتالية  $(x_n)$

معرفة كما يلي

$$x_n = x_{n-1} + h$$

أي  $x_n = x_{n-1} - 0,1$  و عليه  $(x_n)$  متتالية حسابية أساسها  $-1$  إذن  $x_n = -0,1n$

المتتالية  $(y_n)$  معرفة كمايلي  $y_n = (1-0,1)y_{n-1}$  أي  $y_n = 0,9y_{n-1}$

وبالتالي  $(y_n)$  متتالية هندسية أساسها  $0,9$  و عليه  $y_n = 1 \times (0,9)^n$

(ب)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_n$	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5	-0,6	-0,7	-0,8	-0,9	-1
$y_n$	1	0,9	0,81	0,72	0,65	0,59	0,53	0,47	0,43	0,38	0,34

خاصية

إذا وجدت دالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  بحيث  $f' = f$  و  $f(0) = 1$  فإنها لا تتعذر على  $\mathbb{R}$ .

الإثبات

لتكن الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $h(x) = f(x) \times f(-x)$

الدالة  $h$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ودالتها المشتقة  $H$  معرفة بـ

$$H(x) = f'(x)f(-x) - f'(-x)f(x)$$

وبما انه  $f'(x) = f(x)$  فإن عبارة  $H(x)$  تصبح  $H(x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$

إذن  $h$  دالة ثابتة.

بما انه  $f(0) = 1$  فإن  $h(0) = f(0)f(0) = 1$  وبالتالي من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$

$$h(x) = 1$$

بما انه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا  $f(x)f(-x) = 1$  فإن  $f(x)$  غير معدومة على  $\mathbb{R}$ .

مبرهنة

توجد دالة وحيدة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و بحيث  $f' = f$  و  $f(0) = 1$ .

الإثبات

وجود الدالة  $f$  يقبل بدون برهان ولكن يلزمنا إثبات وحدانية  $f$ .

لتكن  $g$  دالة أخرى قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و بحيث  $g' = g$  و  $g(0) = 1$ .

$$\text{الدالة } \frac{g}{f} \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R} \text{ ولدينا } \left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2} = 0$$

إذن الدالة  $\frac{g}{f}$  ثابتة من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  وبما ان  $\left(\frac{g}{f}\right)(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1$  فإن من أجل

كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  يكون  $\frac{g(x)}{f(x)} = 1$  أي  $g(x) = f(x)$  وهذا يدل على أن  $f$  وحيدة.

## 2. تعريف الدالة الأسية

نسمي دالة أسية، الدالة الوحيدة  $f$  القابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  بحيث  $f' = f$  و  $f(0) = 1$

ونرمز لها بـ  $\exp$  و نكتب  $f(x) = \exp(x)$ .



### 3. خواص الدالة الأسية

- (1) الدالة الأسية قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة هي نفسها أي  $\exp'(x) = \exp(x)$
- (2) الدالة الأسية مستمرة على  $\mathbb{R}$  و  $\exp(0) = 1$
- (3) مهما يكن العددين الحقيقيان  $a$  و  $b$  لدينا  $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$
- (4) مهما يكن العددين الحقيقيان  $a$  و  $b$  و العدد الصحيح  $n$  لدينا  $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$  ،  $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$  ،  $\exp(2a) = (\exp(a))^2$
- $\exp(na) = (\exp(a))^n$
- (5) مهما يكن العدد الحقيقي  $a$  يكون  $\exp(a) > 0$

#### الإثبات

نتحصل على الخاصيتين (1) و (2) من التعريف  
 (3) لتكن  $g$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $g(x) = f(a+b-x)f(x)$  حيث  $f$  الدالة الأسية.  
 $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا  $g'(x) = -f(a+b-x)f(x) + f(a+b-x)f'(x) = 0$   
 إذن  $g$  دالة ثابتة.  
 بما أن  $g(0) = f(a+b)f(0) = f(a+b)$  و  $g(b) = f(a)f(b)$  فإن  
 $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$  أي  $f(a+b) = f(a) \times f(b)$   
 (4)  $\exp(2a) = \exp(a+a) = \exp(a) \times \exp(a) = (\exp(a))^2$   
 لدينا  $\exp(-a+a) = 1$  ولدينا من جهة أخرى  $\exp(-a+a) = \exp(-a) \times \exp(a)$   
 إذن  $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$  وبالتالي  $1 = \exp(-a) \times \exp(a)$

$$\exp(a-b) = \exp(a) \times \exp(-b) = \exp(a) \times \frac{1}{\exp(b)} = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$$

نتقبل أن  $\exp(na) = (\exp(a))^n$  (نبرهن على هذه الخاصية بالتراجع من أجل  $n$  طبيعي).  
 و من أجل  $n$  عدد صحيح سالب فإن  $-n$  عدد طبيعي ولدينا  
 $\exp(na) = (\exp(-na)) = \frac{1}{\exp(-na)} = \frac{1}{(\exp(a))^{-n}} = (\exp(a))^n$

(5) بكتابة  $a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$  فيكون  $\exp(a) = \exp\left(\frac{a}{2}\right) \times \exp\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2$   
 ومنه نستنتج  $\exp(a) > 0$

#### مبرهنة

الدالة الأسية هي الدالة الوحيدة  $f$  القابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ، غير معدومة ، حيث  
 $f'(0) = 1$  و  $f(a+b) = f(a) \times f(b)$

#### الإثبات

الدالة الأسية تحقق الشروط الأربعة التالية:  
 (1) قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ، (غير معدومة) ،  $(f'(0) = 1)$  ،  $(f(a+b) = f(a) \times f(b))$   
 لكن  $f$  دالة أخرى تحقق هذه الشروط الأربعة السابقة و بحيث من أجل  $a$  عدد حقيقي  
 معطى ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$  كفي  $f(x+a) = f(x) \times f(a)$   
 الدالة  $x \mapsto f(x+a)$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  لأنها مركب دالتين ، والدالة  
 $x \mapsto f(x)$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  .  
 إذن  $f'(x+a) = f'(x) \times f(a)$   
 من أجل  $x=0$  لدينا  $f'(0) = f'(a) \times f(a)$  و بما أن  $f'(0) = 1$  فإن  $f'(a) = \frac{1}{f(a)}$  من أجل كل  $a$   
 إذن الدالة  $f'$  حل للمعادلة  $f' = f \times f'$   
 بالإضافة إلى ذلك  $f(a+0) = f(a) \times f(0)$  أي  $f(a) = f(a) \times f(0)$   
 لكن  $f(a)$  غير معدوم إذن  $f(0) = 1$   
 وعليه  $f'$  هي حل للمعادلة  $f' = f$  و  $f(0) = 1$  وهذا يعني أن  $f$  هي الدالة الأسية.

#### تمرين تدريبي

$h, g, f$  دوال معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \exp(x) + 2x$  ،  $g(x) = \exp(x-1)$  ،  
 $h(x) = \exp(-2x)$  و  
 (أ) عين اتجاه تغير كل دالة .  
 (ب) أوجد علاقة بين  $g$  و  $g'$  و  $h$  و  $h'$  .

#### الحل

(أ) - الدالة  $f$  هي مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  هما  $x \mapsto \exp x$  و  $x \mapsto 2x$  و  
 لدينا  $f'(x) = \exp x + 2$   
 من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا  $\exp x > 0$  ومنه  $f'(x) > 0$  أي أن الدالة  $f$  متزايدة تماماً على  $\mathbb{R}$   
 •  $g(x) = \exp(x) \times \exp(-1)$   
 الدالة  $g$  هي جداء الدالة  $\exp$  بعدد حقيقي موجب  $\exp(-1)$  ومنه  
 $g'(x) = \exp'(x) \times \exp(-1) = \exp(x-1)$  ومنه  $g$  متزايدة تماماً على  $\mathbb{R}$   
 •  $h(x) = (\exp(-x))^2 = \left(\frac{1}{\exp(x)}\right)^2$  حيث  $u(x) = \exp(x)$   
 $h'(x) = \frac{-2 \exp(x)}{(\exp(x))^3} = \frac{-2}{(\exp(x))^2} = -2 \exp(-2x)$   
 لكن  $\exp(-2x) > 0$  إذن  $h'(x) < 0$  ومنه نستنتج أن  $h$  متناقصة تماماً على  $\mathbb{R}$   
 (ب)  $g'(x) = \exp(x-1) = g(x)$  و  $h'(x) = -2 \exp(-2x) = -2h(x)$



تمرين تدريبي 2

(1) بسط العبارات التالية :

$$C = \frac{\exp(3x-1)}{\exp(-3x)}, \quad B = \exp(3-2x) \times \exp(5x-7), \quad A = (\exp(x))^3$$

(ب) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  لدينا  $\frac{\exp x}{\exp x - x} = \frac{1}{1 - x \exp(-x)}$

$$\frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)} = \frac{1 - \exp(-2x)}{1 + \exp(-2x)}$$

✓ الحل

$$A = (\exp(x))^3 = \exp(x) \times \exp(x) \times \exp(x) = \exp(2x) \times \exp(x) = \exp(3x) \quad (1)$$

$$B = \exp(3-2x) \times \exp(5x-7) = \exp(3-2x+5x-7) = \exp(-4+3x)$$

$$C = \frac{\exp(3x-1)}{\exp(-3x)} = \frac{\exp(3x-1)}{(\exp(3x))^{-1}} = \exp(3x-1) \times \exp(3x) = \exp(3x-1+3x) = \exp(6x-1)$$

$$\frac{\exp(x)}{\exp(x) - x} = \frac{\exp(x)}{\exp(x)[1 - x \exp(-x)]} = \frac{1}{1 - x \exp(-x)} \quad (ب)$$

$$\frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)} = \frac{\exp(x) \left[ 1 - \frac{\exp(-x)}{\exp(x)} \right]}{\exp(x) \left[ 1 + \frac{\exp(-x)}{\exp(x)} \right]} = \frac{1 - (\exp(-x))^2}{1 + (\exp(-x))^2} = \frac{1 - \exp(-2x)}{1 + \exp(-2x)}$$

4. الترميز  $e^x$

صورة الواحد بالدالة الأسية نرمز له بـ  $e$  أي  $\exp(1) = e$

العدد  $e$  هو عدد حقيقي والقيمة التقريبية له هي 2,71828

الخواص البرهنة في الفقرة السابقة تسمح لنا بكتابة  $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = e^n$  من أجل كل عدد صحيح  $n$ .

نرمز بـ  $e^x$  إلى صورة العدد الحقيقي  $x$  بالدالة الأسية و نكتب  $\exp(x) = e^x$

ملاحظة

العدد  $e$  عدد غير ناطق.

الدالة الأسية

خواص

خواص الدالة الأسية البرهنة في الفقرة السابقة تكتب بالترميز الجديد كمايلي :

(1) الدالة  $e^x$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة هي نفسها

(2)  $e^0 = 1$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يكون  $e^x > 0$ .

(3) مهما يكن العددين الحقيقيان  $a$  و  $b$  و العدد الصحيح  $n$  :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b, \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}, \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}, \quad (e^a)^n = e^{na}$$

(4) من أجل كل الأعداد الحقيقية  $a_1, a_2, \dots, a_p$  حيث  $p$  عدد طبيعي لدينا

$$e^{a_1} e^{a_2} \times \dots \times e^{a_p} = e^{a_1 + a_2 + \dots + a_p}$$

تمرين تدريبي 1

بسط العبارات التالية :

$$A = e^{-3} \times (e^2)^8, \quad B = (e^{-x}) \times (e^x)^3$$

$$C = e^{2x} \times e^{-2x}, \quad D = \frac{e^{-x}}{e^x + 1} - \frac{e^{-2x}}{1 + e^{-x}}$$

✓ الحل

$$A = e^{-3} \times e^8 = e^{-3+8} = e^5$$

$$B = e^{-x} \times (e^x)^3 = e^{-x} \times e^{3x} = e^{-x+3x} = e^{2x}$$

$$C = e^{2x} \times e^{-2x} = e^{2x-2x} = e^0 = 1$$

$$D = \frac{e^{-x}}{e^x + 1} - \frac{e^{-2x}}{1 + e^{-x}} = \frac{e^{-x} e^{-x}}{e^{2x} + e^x} - \frac{e^{-2x} e^{2x}}{e^{2x} + e^{-x} e^{2x}}$$

$$= \frac{e^0}{e^{2x} + e^x} - \frac{e^0}{e^{2x} + e^x} = \frac{1}{e^{2x} + e^x} - \frac{1}{e^{2x} + e^x} = 0$$

5. دراسة الدالة الأسية

1.5 اتجاه التغير والنهايات

مبرهنة

(1) الدالة الأسية متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$

(2) إذا كان  $x > 0$  فإن  $e^x > 1$  وإذا كان  $x < 0$  فإن  $e^x < 1$ .



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad (3)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \quad (4) \text{ ومن اجل } h \text{ قريب من الصفر } e^h \approx 1 + h$$

### الإثبات

(1) من اجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا  $\exp'(x) = \exp(x)$  و  $\exp(x) > 0$   
إذن الدالة الأسية متزايدة على  $\mathbb{R}$

(2) بما أن الدالة الأسية متزايدة تماما ومستمرة على المجال  $[0, +\infty[$  و  $\exp(0) = 1$   
فإنه من اجل كل  $x > 0$  يكون  $\exp(x) > 1$   
- بما أن الدالة الأسية متزايدة تماما ومستمرة على  $]-\infty, 0]$  و  $\exp(0) = 1$   
فإنه من اجل كل  $x < 0$  يكون  $\exp(x) < 1$

(3) لتكن  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = e^x - x$

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا  $f'(x) = e^x - 1$  و  $f'(0) = 0$   
- على المجال  $]-\infty, 0]$  لدينا  $f'(x) < 0$  ومنه  $f$  متناقصة تماما على مجال  $]-\infty, 0]$ .  
- على المجال  $[0, +\infty[$  لدينا  $f'(x) > 0$  ومنه  $f$  متزايدة تماما على  $[0, +\infty[$   
وبما أن  $f(0) = 1$  فإن الدالة  $f$  تقبل قيمة حدية صغرى تساوي 1.

إذن من اجل كل عدد حقيقي  $x$  يكون  $f(x) \geq 1$

ومنه نستنتج أن  $f(x) > 0$  على  $\mathbb{R}$  وهذا يعني أن  $e^x > x$ .

وبما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  (حسب نظرية الحصر)

- نضع  $X = -x$  و بالتالي لـ  $x$  يؤول إلى  $(-\infty)$  فإن  $X$  يؤول إلى  $(+\infty)$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^{-X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^X} = 0$$

(4) - الدالة  $x \mapsto e^x$  قابلة للاشتقاق عند الصفر وعددها المشتق عند الصفر هو 1

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

ومنه نستنتج بالتعريف أن  $e^h = 1 + h + \phi(h)$  حيث  $\lim_{h \rightarrow 0} \phi(h) = 0$   
من النهاية السابقة نستنتج أن في جوار الصفر  $e^h = 1 + h + \phi(h)$  حيث  $\lim_{h \rightarrow 0} \phi(h) = 0$   
إذن  $e^h \approx 1 + h$  بجوار الصفر.

### تمرين تدريبي

لتكن  $f$  و  $g$  دالتين معرفتين بـ  $f(x) = \frac{e^x - 3}{e^x + 1}$  و  $g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ثم احسب  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

### الحل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 - \frac{3}{e^x})}{e^x(1 + \frac{1}{e^x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{3}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

### تمرين تدريبي

(1) باستعمال التقريب التالي لـ  $e^x$  برهن أنه عندما يكون العدد الطبيعي  $n$  كبيرا

$$e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

(2) لتكن  $(U_n)$  متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  بـ

$$U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ احسب بقريب } 10^{-10} \text{ الحدود } U_{1000} \text{ و } U_{100} \text{ ثم قارنها مع } e.$$

### الحل

(1) بجوار الصفر لدينا  $e^h \approx h + 1$

$$\text{وبوضع } h = \frac{1}{n} \text{ مع } n \text{ كبير بالقدر الكافي نجد } e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}$$

$$\text{وبرفع الطرفين إلى القوة } n \text{ نجد } \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ أي } e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

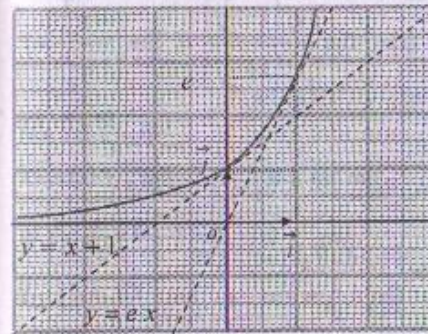
$$U_{100} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2,7048138294$$

$$U_{1000} = \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2,7169239325$$

نلاحظ أن  $U_{100}$  و  $U_{1000}$  قيم مقربة إلى  $10^{-10}$  للعدد  $e$   
و كلما كان  $n$  كبيرا جدا كلما اقتربنا من العدد  $e$   
و بالتالي  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = e$



## 2.5 جدول تغيرات و المنحنى البياني للدالة الأسية



$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$\exp'(x)$		+	
$\exp(x)$			$+\infty$

The graph shows the exponential function  $\exp(x)$  and its derivative  $\exp'(x)$ . The x-axis is marked with  $-\infty$ ,  $0$ , and  $+\infty$ . The y-axis is marked with  $0$  and  $1$ . A horizontal line at  $y=1$  represents the derivative  $\exp'(x)$ . The curve  $\exp(x)$  starts at  $(0,1)$  and increases towards  $+\infty$  as  $x$  increases.

- المنحنى الممثل للدالة  $\exp$  يقبل المستقيم ذا المعادلة  $y=0$  مقارب له بجوار  $(-\infty)$
- للمماس لمنحنى الدالة  $\exp$  عند  $1$  و  $0$  معادلتها على الترتيب  $y=x+1$  و  $y=ex$
- بما أن  $e^x > x$  من أجل كل  $x$  فإن المنحنى الممثل للدالة  $\exp$  يقع فوق المستقيم ذي المعادلة  $y=x$

## 3.5 الوضع النسبي لبيان الدالة $\exp$ ومماساته

نسمي  $(\gamma)$  المنحنى البياني للدالة  $\exp$  في معلم متعامد ومتجانس، وليكن  $a$  عدد حقيقي و

لتكن  $M(a, e^a)$  نقطة من  $(\gamma)$ .

معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(\gamma)$  عند  $M$  هي  $y = e^a + e^a(x-a)$ .

لدراسة الوضع النسبي لـ  $(\gamma)$  بالنسبة إلى  $(T)$  ندرس إشارة المقدار  $e^x - [e^a + e^a(x-a)]$ .

نضع  $f(x) = e^x - [e^a + e^a(x-a)]$

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  هما:

$e^x$  و  $x \mapsto -[e^a + e^a(x-a)]$  ولدينا  $f'(x) = e^x - e^a$

بما أن الدالة  $\exp$  متزايدة تماماً فإن

- إذا كان  $x > a$  يكون  $e^x > e^a$  وعليه  $f'(x) > 0$

- إذا كان  $x < a$  يكون  $e^x < e^a$  وعليه  $f'(x) < 0$

$x$	$-\infty$	$a$	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$		$f(a)=0$	

- من جدول تغيرات  $f$  نلاحظ أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا  $f(x) \geq 0$  وهذا يعني أن المنحنى للدالة  $\exp$  يقع فوق المماس  $(T)$  و يمسّه في النقطة الوحيدة  $M(a, e^a)$

## 4.5 نهايات شهيرة

مبرهنة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

الإنبات

لكن  $f$  دالة معرفة على  $[0, +\infty[$  بـ  $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$

$f'$  و  $f''$  قابلتان للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا  $f'(x) = e^x - x$  و  $f''(x) = e^x - 1$ .  
من أجل كل  $x$  من  $[0, +\infty[$  لدينا  $f''(x) \geq 0$  ومنه الدالة  $f'$  متزايدة تماماً على  $[0, +\infty[$ .

بما أن  $f'(0) = 1$  فإن  $f'(x) > 0$  وعليه فإن الدالة  $f$  متزايدة تماماً على  $[0, +\infty[$  وبما أن  $f(0) = 1$  فإن  $f(x) \geq 1$ .

$f(x) > 0$  يكافئ  $\frac{x^2}{2} < e^x$  بالقسمة على العدد الحقيقي الموجب تماماً  $x$  نجد  $\frac{x}{2} < \frac{e^x}{x}$

وبما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$  فإن حسب نظرية الحصر نجد  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

• بوضع  $X = -x$  يكون  $\frac{e^X}{X} = \frac{-1}{e^{-X}} = -X e^{-X}$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} X e^X = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left( \frac{-1}{\frac{e^X}{X}} \right) = 0$$

ملاحظة

من أجل قيم كبرى لـ  $x$ ، فالعددان  $x$  و  $e^x$  يأخذان قيمة كبرى جداً و بما أن

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  فإن  $e^x$  أكبر بكثير عن  $x$  نقول أن الدالة الأسية تتفوق عن

الدالة  $x \mapsto x$ .

### تمرين تدريبي 1

1)  $f$  و  $g$  دالتان معرفتان على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = e^x - 2x + 1$  و  $g(x) = \frac{3e^x - 2}{e^x + 2}$

احسب نهايات  $f$  و  $g$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$

2)  $h$  و  $k$  دالتان معرفتان كما يلي  $h(x) = \frac{x+2}{3e^x - 1}$  و  $k(x) = \frac{e^{x-1} - 1}{x-1}$

احسب نهاية  $h$  عند  $(+\infty)$  و  $(-\infty)$

ب) احسب نهاية  $k$  عند  $(+\infty)$  و  $(-\infty)$  و  $1$



تمرين تدريبي 2

ف دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = e^x - x - 2$  و  $(\gamma)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) أدرس تغيرات الدالة  $f$ .

(2) بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  لها حلان في  $\mathbb{R}$ . ثم ارسم  $(\gamma)$ .

الحل

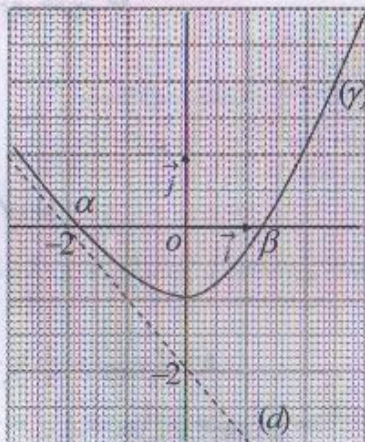
(1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x-2) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e^x}\right) = +\infty$

لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

$f$  دالة قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا  $f'(x) = e^x - 1$ .  
 $f'(x) = 0 \iff x = 0$

- إذا كان  $x > 0$  فإن  $e^x > 1$  وبالتالي  $f'(x) > 0$  أي  $f$  متزايدة تماماً على  $]0, +\infty[$ .  
 - إذا كان  $x < 0$  فإن  $e^x < 1$  وبالتالي  $f'(x) < 0$  أي  $f$  متناقصة تماماً على  $] -\infty, 0[$ .



$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	$-$	$0$	$+$
تغيرات $f$	$+\infty$	$-1$	$+\infty$

- بما أن  $f'(x) < 0$  على المجال  $] -\infty, 0[$  و  $f(x) = 0$  فإن المعادلة  $f(x) = 0$  لها حل وحيد  $\alpha$  من  $] -\infty, 0[$ .  
 - بما أن  $f'(x) > 0$  على المجال  $]0, +\infty[$  و  $f(x) = 0$  فإن للمعادلة  $f(x) = 0$  لها حل وحيد  $\beta$  من  $]0, +\infty[$ .

إذن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين  $\alpha$  و  $\beta$  على  $\mathbb{R}$ .

بما أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  فإن المستقيم  $(d)$  ذا المعادلة  $y = -x - 2$  مقارب لـ  $(\gamma)$  بجوار  $-\infty$ .

الحل

(1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$  لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(3 - \frac{2}{e^x})}{e^x(1 + \frac{2}{e^x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{2}{e^x}}{1 + \frac{2}{e^x}} = 3$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  لأن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3e^x - 2}{e^x + 2} = -\frac{2}{2} = -1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 2x + 1) = +\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x + 1) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{2}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right) = +\infty$

لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{3e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 + \frac{2}{x})}{e^x(3 - \frac{1}{e^x})} = 0$

لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{3e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1 + \frac{2}{x})}{3e^x - 1} = +\infty$

لأن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3e^x - 1) = -1$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$

(ب)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \kappa(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \kappa(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1} - 1) \times \frac{1}{x-1} = 0$

لأن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1} - 1) = -1$

حيث  $X = x - 1$   $\lim_{x \rightarrow 1} \kappa(x) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$



## 5.5 المعادلات والمترجمات

خاصية

- 1) مهما يكن العدد الحقيقي الموجب تماماً  $m$  فالمعادلة  $e^x = m$  تقبل حلاً وحيداً في  $\mathbb{R}$  ونرمز له بـ  $\ln(m)$  ونكتب  $x = \ln(m)$
- 2) من أجل كل عددين حقيقيين  $a$  و  $b$  :  
 $e^a = e^b$  يكافئ  $a = b$  و  $e^a < e^b$  يكافئ  $a < b$

الاثبات

- 1) الدالة الأسية قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  فهي إذن مستمرة على  $\mathbb{R}$  وبالإضافة إلى كونها متزايدة تماماً على  $\mathbb{R}$  فإنها تقابل من  $\mathbb{R}$  في  $]0, +\infty[$ .
- 2) بما أن الدالة الأسية تقابل من  $\mathbb{R}$  في  $]0, +\infty[$  ومتزايدة تماماً على  $\mathbb{R}$  فإن  $e^a = e^b$  يكافئ  $a = b$  و  $e^a < e^b$  يكافئ  $a < b$ .

ملاحظة

بما أن المعادلة  $e^x = m$  تقبل حلاً وحيداً هو  $\ln(m)$  فإنه يمكن كتابة  $e^{\ln(m)} = m$ .

### تمرين تدريبي 1

بسط الأعداد التالية :  $A = e^{\ln(2) - \ln(3)}$  ،  $B = \frac{e^{\ln(\frac{1}{2})}}{e^{\ln(2)}}$  ،  $C = e^{-2\ln(3)}$  ،  $D = e^{2\ln(5)}$  ،  $E = e^{\ln(5) - 2\ln(2)}$

الحل

$$A = e^{\ln(2)} \times e^{-\ln(3)} = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$B = \frac{e^{\ln(\frac{1}{2})}}{e^{\ln(2)}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$C = e^{-2\ln(3)} = \frac{1}{e^{2\ln(3)}} = \frac{1}{(e^{\ln(3)})^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$D = e^{2\ln(5)} = (e^{\ln(5)})^2 = 5^2 = 25$$

$$E = e^{\ln(5) - 2\ln(2)} = e^{\ln(5)} \times \frac{1}{e^{2\ln(2)}} = 5 \times \left(\frac{1}{e^{\ln(2)}}\right)^2 = 5 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

### تمرين تدريبي 2

حل المعادلات والمترجمات التالية

(1)  $e^{x^2+3x} = e^4$  (أ) ،  $e^{2x+1}(e^{x^2-x-3})$  (ب) ،  $e^{-3x+2} \geq 3$  (ج)

الحل

- المعادلتان  $e^{U(x)} = e^{V(x)}$  و  $U(x) = V(x)$  لهما نفس مجموعة الحلول.  
 المترجمتان  $e^{U(x)} < e^{V(x)}$  و  $U(x) < V(x)$  لهما نفس مجموعة الحلول.  
 (1) المعادلتان  $e^{x^2+3x} = e^4$  و  $x^2+3x=4$  لهما نفس مجموعة الحلول.  
 المعادلة  $x^2+3x=4$  تكافئ المعادلة  $x^2+3x-4=0$  التي حلاها هما  $x_1=1$  و  $x_2=-4$ .  
 إذن مجموعة حلول المعادلة  $e^{x^2+3x} = e^4$  هي  $S = \{1, -4\}$ .

(ب) المترجمتان  $e^{x^2-x-3} < e^{2x+1}$  و  $x^2-x-3 < 2x+1$  لهما نفس مجموعة الحلول.

المترجمة  $x^2-x-3 < 2x+1$  تكافئ المترجمة  $x^2-3x-4 > 0$  وهذه الأخيرة مجموعة حلولها هي  $]4, +\infty[ \cup ]-\infty, -1]$

إذن مجموعة حلول المترجمة (ب) هي  $S = ]-\infty, -1] \cup ]4, +\infty[$

(ج) بما أن  $e^{\ln 3} = 3$  فإن المترجمة (ج) تكتب على الشكل  $e^{-3x+2} \geq e^{\ln 3}$

المترجمتان  $e^{-3x+2} \geq e^{\ln 3}$  و  $-3x+2 \geq \ln 3$  لهما نفس مجموعة الحلول.

مجموعة حلول المترجمة  $-3x+2 \geq \ln 3$  هي  $]-\infty, \frac{2-\ln 3}{3}]$

إذن مجموعة حلول المترجمة (ج) هي  $S = ]-\infty, \frac{2-\ln 3}{3}]$

### تمرين تدريبي 3

حل المعادلات والمترجمات التالية

(1)  $e^{2x} = (e^{-x})^2 \times e^{-3}$  (أ) ،  $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$  (ب) ،  $e^{-x} - 3 \geq 0$  (ج)

الحل

لحل معادلة من الشكل  $ae^{2x} + be^x + c = 0$  نضع  $e^x = X$   
 الحلول (في حالة وجودها) هي الأعداد  $x_0$  بحيث  $x_0 = \ln(X_0)$  حيث  $X_0$  هو الحل  
 الموجب للمعادلة  $aX^2 + bX + c = 0$

$$(e^{-x})^2 \times e^{-3} = e^{-2x} \times e^{-3} = e^{-2x-3} \quad (1)$$

ومنه المعادلة (1) تكتب على الشكل  $e^{2x} = e^{-2x-3}$



وهذه الأخيرة تكافئ  $2x = -2x - 3$

مجموعة حلول المعادلة  $2x = -2x - 3$  هي  $\left\{-\frac{3}{4}\right\}$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (أ) هي  $S = \left\{-\frac{3}{4}\right\}$

(ب) بوضع  $X = e^x$  المعادلة (ب) تكتب على الشكل  $X^2 - 3X - 4 = 0 \dots (I)$

حلا للمعادلة (أ) هما  $X_0 = 4$  و  $X_1 = -1$

$X_1 = -1$  مرفوض و  $X_0 = 4$  مقبول

$X_0 = e^x$  يكافئ  $x_0 = \ln(X_0) = \ln 4$

إذن مجموعة حلول المعادلة (ب) هي  $S = \{\ln 4\}$

(ج)  $e^{-x} - 3 \geq 0$  يكافئ  $e^{-x} \geq e^{\ln 3}$  يكافئ  $-x \geq \ln 3$  يكافئ  $x \leq -\ln 3$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (ج) هي  $S = ]-\infty, -\ln 3]$

## 6. الدالة المركبة $x \mapsto e^{u(x)}$

دراسة هذا النوع من الدوال تعتمد على مبرهنة نهاية دالة مركبة واشتقاق دالة مركبة.

الدالة  $\exp$  معرفة على  $\mathbb{R}$  وبالتالي مجموعة تعريف الدالة  $\exp$  هي مجموعة تعريف الدالة  $u$

**مبرهنة**

(1) إذا كانت الدالة  $u$  قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  من  $\mathbb{R}$  فإن الدالة  $f$  المعرفة بـ

$f(x) = (\exp \circ u)(x) = e^{u(x)}$  قابلة للاشتقاق على  $I$  ولدينا  $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$

(2) اتجاه تغير الدالة  $x \mapsto e^{u(x)}$  هو نفس اتجاه تغير الدالة  $u$

**الإثبات**

(1)  $f'(x) = (\exp \circ u)'(x) = u'(x) \times \exp'(u(x))$

لكن  $\exp'(u(x)) = e^{u(x)}$  و عليه  $f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$

(2) بما أن  $0 < e^{u(x)}$  فإن إشارة  $f'(x)$  هي نفس إشارة  $u'(x)$

و عليه فإن اتجاه تغير الدالة  $x \mapsto e^{u(x)}$  هو نفس اتجاه تغير الدالة  $u$

**مثال 1**

عين المجال الذي تكون فيه الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق ثم احسب  $f'(x)$  في كل حالة من الحالات التالية.

(أ)  $f(x) = e^{2x+3}$  (ب)  $f(x) = e^{2x^2+x}$  (ج)  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

(د)  $f(x) = e^{\sin x}$  (هـ)  $f(x) = e^{\frac{x}{x^2+1}}$

✓ الحل

(أ) الدالة  $x \mapsto 2x+3$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  وبالتالي الدالة  $f$  معرفة وقابلة

للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا  $f'(x) = 2 \times e^{2x+3}$

(ب) الدالة  $x \mapsto 2x^2+x$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  وبالتالي الدالة  $f$  معرفة و

قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا  $f'(x) = (4x+1)e^{2x^2+x}$

(ج) الدالة  $x \mapsto \frac{1}{x}$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R} - \{0\}$  ولدينا  $f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

(د) الدالة  $x \mapsto \sin(x)$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا  $f'(x) = (\cos x)e^{\sin x}$

(هـ) الدالة  $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  وبالتالي الدالة  $f$  معرفة وقابلة

للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا  $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} e^{\frac{x}{x^2+1}}$

**تمرين تدريبي 1**

احسب نهاية الدالة  $f$  عند  $(+\infty)$  في كل حالة من الحالات التالية.

(1)  $f(x) = e^{2x+3}$  (2)  $f(x) = e^{x^2+1}$

(3)  $f(x) = e^{-x^2}$  (4)  $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$

✓ الحل

(1) نهاية الدالة  $x \mapsto 2x+3$  عند  $(+\infty)$  هي  $(+\infty)$

ونتيجة الدالة  $x \mapsto e^x$  عند  $(+\infty)$  هي  $(+\infty)$  وبالتالي  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(2) نهاية الدالة  $x \mapsto \frac{2x+1}{x-2}$  عند  $(+\infty)$  هي 2

ونتيجة الدالة  $x \mapsto e^x$  عند 2 هي  $e^2$  ومنه  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^2$

(3) نهاية الدالة  $x \mapsto -x^2$  عند  $(+\infty)$  هي  $(-\infty)$

ونتيجة الدالة  $x \mapsto e^x$  لا يؤول  $(-\infty)$  هي 0 ومنه  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

(4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  ومنه  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



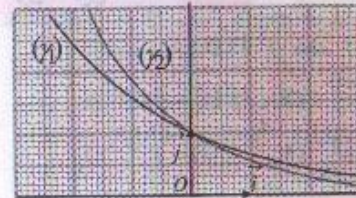
تمرين تدريبي 2

لتكن  $f_k$  و  $g_k$  دالتين معرفتين كما يلي  $f_k(x) = e^{-kx}$  و  $g_k(x) = e^{-kx^2}$  مع  $k > 0$  و  $(\gamma_k)$  و  $(\Gamma_k)$  المنحنيين الممثلين لـ  $f_k$  و  $g_k$  على الترتيب في معلم متعامد ومتجانس.

- (1) ادرس تغيرات الدالة  $f_k$
- (ب) ادرس الوضع النسبي لـ  $(\gamma_1)$  و  $(\gamma_2)$  ثم ارسم  $(\gamma_1)$  و  $(\gamma_2)$
- (2) ادرس تغيرات الدالة  $g_k$
- (ب) ادرس الوضع النسبي لـ  $(\Gamma_1)$  و  $(\Gamma_2)$  ثم ارسم  $(\Gamma_1)$  و  $(\Gamma_2)$

✓ الحل

(1) الدالة  $x \mapsto -kx$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  وبالتالي الدالة  $f_k$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا  $f'_k(x) = (-k)e^{-kx}$  وبما أن  $k > 0$  فإن من أجل كل عند حقيقي  $x$  يكون  $f'_k(x) < 0$  أي أن  $f_k$  متناقصة تماماً على  $\mathbb{R}$ .



$x$	$-\infty$	$+\infty$
إشارة $f'_k$	-	
تغيرات $f_k$	$+\infty \searrow 0$	

بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-kx) = -\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-kx} = 0$   
 وبما أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-kx) = +\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-kx} = +\infty$

(ب) لدراسة الوضع النسبي لـ  $(\gamma_1)$  و  $(\gamma_2)$  ندرس إشارة الفرق  $f_2(x) - f_1(x)$ .

$$f_2(x) - f_1(x) = e^{-2x} - e^{-x} = e^{-x}(e^{-x} - 1) = e^{-x} \left( \frac{1 - e^x}{e^x} \right)$$

$$f_2(x) - f_1(x) = 0 \text{ يكافئ } 1 - e^x = 0 \text{ يكافئ } x = 0$$

- إذا كان  $x > 0$  فإن  $f_2(x) - f_1(x) < 0$  وبالتالي  $(\gamma_2)$  تقع تحت  $(\gamma_1)$

- إذا كان  $x < 0$  فإن  $f_2(x) - f_1(x) > 0$  وبالتالي  $(\gamma_2)$  تقع تحت  $(\gamma_1)$

للتقسيم ذو المعادلة  $y = 0$  مقارب للمنحنى  $(\gamma_k)$  في جوار  $(-\infty)$

(2) دراسة تغيرات الدالة  $g_k$

الدالة الأسية

الدالة  $x \mapsto -kx^2$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$

اذن الدالة  $g_k$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$

$$\text{ولدينا } g'_k(x) = -2kxe^{-kx^2}$$

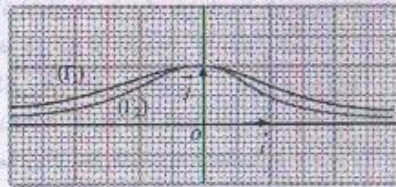
$$g'_k(x) = 0 \text{ يكافئ } x = 0$$

- إذا كان  $x > 0$  فإن  $g'_k(x) < 0$  وبالتالي  $g_k$  متناقصة تماماً على  $]0, +\infty[$

- إذا كان  $x < 0$  فإن  $g'_k(x) > 0$  وبالتالي  $g_k$  متزايدة تماماً على  $]0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-kx^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-kx^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g_k(x) = 0 \text{ وبالتالي}$$



$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
إشارة $g'_k(x)$	+	0	-
تغيرات $g_k$	$0 \nearrow 1 \searrow 0$		

(ب) لدراسة الوضع النسبي لـ  $(\Gamma_1)$  و  $(\Gamma_2)$  ندرس إشارة القدر  $g_2(x) - g_1(x)$

$$g_2(x) - g_1(x) = e^{-2x^2} - e^{-x^2} = e^{-x^2} \left( \frac{1 - e^{x^2}}{e^{x^2}} \right)$$

$$g_2(x) - g_1(x) = 0 \text{ يكافئ } x = 0$$

من أجل كل  $x \in \mathbb{R}^*$  لدينا  $x^2 > 0$

وبما أن الدالة  $\exp$  متزايدة تماماً على  $]0, +\infty[$

$$\text{فإن } e^{x^2} > 1 \text{ أي } e^{x^2} > e^0$$

اذن  $g_2(x) - g_1(x) < 0$  وهنا يعني أن  $(\Gamma_2)$  يقع تحت  $(\Gamma_1)$

- المستقيم ذو المعادلة  $y = 0$  مقارب لـ  $(\Gamma_1)$  و  $(\Gamma_2)$  في جوار  $+\infty$  و  $-\infty$

- الدالة  $g_k$  زوجية وبالتالي منحناها يقبل للتقسيم  $(x = 0)$  كمحور تناظر له

7. المعادلات التفاضلية

نسمي معادلاته تفاضلية كل معادلة تربط بين دالة ومشتقاتها.

حل معادلة تفاضلية على مجال  $I$  يعني إيجاد كل الدوال  $f$  القابلة للاشتقاق على  $I$

و التي تحقق للمعادلة المعطاة.

في هذه الفقرة نتطرق فقط إلى المعادلات التفاضلية من الشكل:

$$y' = ay + b \text{ حيث } a \text{ و } b \text{ عددا حقيقيان و } a \neq 0$$



## 2.7 حل المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ مع $ab \neq 0$

### مبرهنة

الحلول في  $\mathbb{R}$  للمعادلة التفاضلية  $y' = ay + b$  مع  $ab \neq 0$  هي الدوال  $f_k$  المعرفة من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  بـ  $f_k(x) = k e^{ax} - \frac{b}{a}$  حيث  $k$  عدد حقيقي كفي.

### الإثبات

نفرض أن الدالة  $f$  القابلة للاشتقاق على  $I$  هي حلا للمعادلة  $y' = ay + b$  عندئذ نضع من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  نضع  $g(x) = f(x) + \frac{b}{a}$

الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ومن أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا  $g'(x) = f'(x)$

$$f'(x) = af(x) + b = ag(x)$$

إذن  $g'(x) = ag(x)$  وهذا ما ثبت أن  $g$  هي حل للمعادلة التفاضلية  $y' = ay$

إذن  $g$  هي الدالة  $x \mapsto k e^{ax}$  حيث  $k$  عدد حقيقي كفي.

بالعكس كل دالة  $f$  من الشكل  $x \mapsto k e^{ax} - \frac{b}{a}$  هي حل للمعادلة  $y' = ay + b$  لأنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا  $f'(x) = k a e^{ax}$  و  $f'(x) = af(x) + b$ .

وعليه حلول المعادلة التفاضلية  $y' = ay + b$  هي الدوال  $f_k$  المعرفة بـ  $f_k(x) = k e^{ax} - \frac{b}{a}$

### ملاحظة

المعادلة التفاضلية من الشكل  $y' = ay + b$  مع  $a \neq 0$  تسمى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ذات معاملات  $a$  و  $b$  ثابتة.

### تمرين تدريبي

أوجد الدالة  $f$  حلا للمعادلة التفاضلية  $y' + y = 1 \dots (E)$  بحيث  $f(0) = 2$

### الحل

المعادلة التفاضلية  $(E)$  تكتب على الشكل  $y' = -y + 1$

الحل العام لهذه الأخيرة هي الدوال  $f_k$  المعرفة من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  بـ  $f_k(x) = k e^{-x} + 1$

$$f_k(0) = 2 \text{ يكافئ } k + 1 = 2 \text{ يكافئ } k = 1$$

منه الدالة  $f$  المطلوبة معرفة كما يلي  $f(x) = e^{-x} + 1$

## 1.7 حل المعادلة التفاضلية $y' = ay$ مع $a \neq 0$

### مبرهنة 1

حلول المعادلة التفاضلية  $y' = ay$  مع  $a \neq 0$  على  $\mathbb{R}$  هي دوال  $f_k$  المعرفة بـ  $f_k(x) = k e^{ax}$  حيث  $k$  عدد حقيقي كفي.

### الإثبات

من أجل كل عدد حقيقي  $k$  لدينا  $f_k'(x) = a k e^{ax}$

إذن  $f_k'(x) = a f_k(x)$  وهذا يعني أن  $f_k$  حل للمعادلة التفاضلية  $y' = ay$ .

• وحداية الدوال  $f_k$

لإثبات أن الدوال  $f_k$  هي الدوال الوحيدة التي تحقق  $y' = ay$

نفرض أنه توجد دوال  $g$  حلول للمعادلة  $y' = ay$  ونبين أن  $g$  من الشكل  $f_k$ .

لتكن  $h$  دالة معرفة بـ  $h(x) = g(x) e^{-ax}$

الدالة  $h$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا  $h'(x) = e^{-ax}(g'(x) - ag(x))$

بما أن  $g$  حل للمعادلة التفاضلية  $y' = ay$  فإن  $g'(x) - ag(x) = 0$

وعليه نجد  $h'(x) = 0$

إذن الدالة  $h$  ثابتة

وهذا يعني من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  يكون  $h(x) = k$

إذن  $g(x) = k e^{ax}$

### مبرهنة 2

من أجل كل ثنائية  $(x_0, y_0)$  المعادلة  $y' = ay$  تقبل حلا وحيدا  $f$

بحيث  $f(x_0) = y_0$

### الإثبات

القول أن  $f_k(x_0) = y_0$  يكافئ القول أن  $k e^{ax_0} = y_0$

إذن لا توجد إلا قيمة وحيدة ممكنة لـ  $k$  هي  $y_0 e^{-ax_0}$

والدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$

### مثال -

حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة التفاضلية  $y' = -3y$  مع  $(x_0, y_0) = (1, 3)$

### الحل

حل المعادلة التفاضلية المعطاة هي الدالة  $f$  المعرفة من أجل كل  $x$  بالعلاقة

$$f(x) = y_0 e^{a(x-x_0)} \text{ وبتعويض } a \text{ و } x_0 \text{ و } y_0 \text{ نجد } f(x) = 3 e^{-3(x-1)}$$



## تطبيقات نموذجية



### تطبيق 1

تبسيط عبارة

$$(1) \text{ بسط التعبيرات التالية: } A = (\exp(x))^4, B = \frac{\exp(7x-3)}{\exp(-7x)}$$

$$C = \frac{\exp(2x) \times \exp(x)}{\exp(5x+1)}$$

$$(2) \text{ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي } x, \frac{\exp(x)-3}{\exp(x)+3} = 1 - \frac{6}{\exp(x)+3}$$

الحل

$$(1) A = (\exp(x))^4 = (\exp(x))^2 \times (\exp(x))^2 = \exp(2x) \times \exp(2x) = \exp(4x)$$

$$B = \frac{\exp(7x-3)}{\exp(-7x)} = \frac{\exp(7x-3)}{(\exp(7x))^{-1}} = \exp(7x-3) \exp(7x) = \exp(7x-3+7x) = \exp(14x-3)$$

$$C = \frac{\exp(2x) \exp(x)}{\exp(5x+1)} = \frac{\exp(3x)}{\exp(5x+1)} = \exp(3x) \times \exp(-5x-1) = \exp(-2x-1)$$

$$(2) \frac{\exp(x)-3}{\exp(x)+3} = \frac{\exp(x)+3-6}{\exp(x)+3} = 1 - \frac{6}{\exp(x)+3}$$

### تطبيق 2

تبسيط الأعداد

$$\text{بسّط الأعداد التالية: } A = e^{-\ln(2)} + e^{\ln(2)}, B = \frac{2}{e^{-1+3\ln(2)}}, C = \frac{e^{3x}}{(e^x)^3}$$

الحل

$$A = \frac{1}{e^{\ln(2)}} + 3 = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$$

$$B = \frac{2}{e^{-1+3\ln(2)}} = \frac{2}{e^{-1} \times (e^{\ln(2)})^3} = \frac{2}{e^{-1} \times 2^3} = \frac{2}{e^{-1} \times 8} = \frac{e}{4}$$

$$C = \frac{e^{3x}}{(e^x)^3} = \frac{e^{3x}}{e^{3x}} = e^{3x-3x} = e^0 = 1$$

### تطبيق 3

مركز تناظر لبيان دالة

$$f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} \text{ بـ } \mathbb{R}$$

(1) بين أن  $f(-x) + f(x) = 2$  ماذا تستنتج؟

$$(2) \text{ تحقق من أن } f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1} - 1$$

الحل

$$(1) f(-x) + f(x) = \frac{3e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{3 - 1}{e^x + 1} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$= \frac{3 - e^x}{1 + e^x} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{3 - e^x + 3e^x - 1}{1 + e^x} = \frac{2 + 2e^x}{1 + e^x} = 2$$

منه نستنتج النقطة  $A(0, 1)$  مركز تناظر لبيان  $f$

$$(2) f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{4e^x - (e^x + 1)}{e^x + 1} = \frac{4e^x}{e^x + 1} - 1$$

### تطبيق 4

كيفية التحقق من صحة مساواة

تحقق من صحة للمساواة المعطاة من أجل كل  $x$  في كل حالة من الحالات التالية:

$$(1) \frac{e^x}{2 + e^x} = \frac{1}{2e^{-x} + 1}$$

$$(2) \frac{e^x}{e^x - x} = \frac{1}{1 - xe^{-x}}$$

$$(3) \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$(4) \frac{e^x - 2}{e^x + 1} = 1 - \frac{3}{e^x + 1}$$

الحل

$$(1) \frac{e^x}{2 + e^x} = \frac{e^x}{e^x \left( \frac{2}{e^x} + 1 \right)} = \frac{1}{2e^{-x} + 1}$$

$$(2) \frac{e^x}{e^x - x} = \frac{e^x}{e^x \left( 1 - \frac{x}{e^x} \right)} = \frac{1}{1 - xe^{-x}}$$

$$(3) \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x (1 - e^{-2x})}{e^x (1 + e^{-2x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$(4) \frac{e^x - 2}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1 - 3}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1}{e^x + 1} - \frac{3}{e^x + 1} = 1 - \frac{3}{e^x + 1}$$



### تطبيق 5

تعيين مجموعة حلول معادلة

حل المعادلات التالية :

$$(1) \quad e^{3x} = 1 \quad (ب) \quad e^{-\frac{1}{x}} = e^{x+2} \quad (ج) \quad 2e^{-2x} = \frac{1}{e^{2x}-2}$$

$$(د) \quad (e^{-x}-5)(e^{2x}-e) = 0 \quad (هـ) \quad \frac{e^{-x}}{1+2e^{-x}} = 3$$

✓ الحل

$$(1) \quad e^{3x} = 1 \quad \text{تكافئ} \quad e^{3x} = e^0 \quad \text{تكافئ} \quad 3x = 0 \quad \text{تكافئ} \quad x = 0$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (1) هي  $S = \{0\}$

(ب) مجموع تعريف المعادلة (ب) هي  $\mathbb{R} - \{0\}$

$$\text{مجموعة حلول المعادلة} \quad e^{-\frac{1}{x}} = e^{x+2} \quad \text{هي نفسها مجموعة حلول المعادلة} \quad -\frac{1}{x} = x+2$$

وهذه الأخيرة تكتب على الشكل  $x^2 + 2x + 1 = 0$  وحلها هو  $x = -1$

إذن مجموعة حلول المعادلة (ب) هي  $S = \{-1\}$

(ج) المجموعة التي تكون فيها المعادلة (ج) لها معنى هي  $\mathbb{R} - \{0\}$

$$\text{المعادلة (ج) تكتب على الشكل} \quad e^{-2x} = \frac{1}{4}$$

$$\text{مجموعة حلول المعادلة} \quad e^{-2x} = \frac{1}{4} \quad \text{هي نفسها مجموعة حلول المعادلة} \quad -2x = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\text{وحلول هذه الأخيرة هي} \quad x = -\frac{1}{2} \ln(4)$$

$$\text{إذن مجموعة حلول المعادلة (ج) هي} \quad S = \left\{-\frac{1}{2} \ln(4)\right\}$$

(د) مجموعة تعريف المعادلة (د) هي  $]-\infty, +\infty[$

$$(e^{-x}-5)(e^{2x}-e) = 0 \quad \text{تكافئ} \quad e^{-x}-5=0 \quad \text{أو} \quad e^{2x}-e=0$$

$$e^{-x}-5=0 \quad \text{تكافئ} \quad e^{-x}=5 \quad \text{ومنه} \quad -x = \ln(5) \quad \text{أي} \quad x = -\ln(5)$$

$$e^{2x}-e=0 \quad \text{تكافئ} \quad e^{2x}=e \quad \text{ومنه} \quad 2x=1 \quad \text{أي} \quad x = \frac{1}{2}$$

$$\text{إذن مجموعة حلول المعادلة (د) هي} \quad S = \left\{\frac{1}{2}, -\ln(5)\right\}$$

(هـ) مجموعة تعريف المعادلة (هـ) هي  $\mathbb{R}$

$$\text{المعادلة (هـ) تكتب على الشكل} \quad e^{-x} = 3 + 6e^x \quad \text{ومنه} \quad e^{-x} = \frac{-3}{5}$$

بما أن  $\frac{-3}{5} < 0$  و  $e^{-x} > 0$  فإن المعادلة  $e^{-x} = \frac{-3}{5}$  ليس لها حلول في  $\mathbb{R}$  وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (هـ) هي مجموعة خالية.

### تطبيق 6

تعيين مجموعة حلول متراجحة

حل المتراجحات التالية :

$$(1) \quad e^{2x} \geq 1 \quad (ب) \quad 3e^{-x} - 2 \geq 0 \quad (ج) \quad (e^x + 3)(2 - e^x) \geq 0$$

$$(د) \quad \frac{e^x - 1}{e^x} \geq 0 \quad (هـ) \quad e^{-x-x} \leq 1 \quad (و) \quad e^x - \frac{9}{e^x} < 0$$

✓ الحل

(1) مجموعة تعريف المتراجحة (1) هي  $\mathbb{R}$

المتراجحة (1) تكتب على الشكل  $e^{2x} \geq e^0$

و مجموعة حلولها هي مجموعة حلول المتراجحة  $2x \geq 0$  أي  $x \geq 0$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (1) هي  $S = [0, +\infty[$

(ب) مجموعة تعريف المتراجحة (ب) هي  $\mathbb{R}$

$$\text{المتراجحة (ب) تكتب على الشكل} \quad e^{-x} \geq \frac{2}{3} \quad \text{أي} \quad e^{-x} \geq e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$$

و مجموعة حلولها هي مجموعة حلول المتراجحة  $-x \geq \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

$$\text{مجموعة حلول المتراجحة} \quad -x \geq \ln\left(\frac{2}{3}\right) \quad \text{هي} \quad ]-\infty, -\ln\left(\frac{2}{3}\right)]$$

$$\text{إذن مجموعة حلول المتراجحة (ب) هي} \quad S = ]-\infty, -\ln\left(\frac{2}{3}\right)]$$

(ج) مجموعة تعريف المتراجحة (ج) هي  $\mathbb{R}$

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا  $e^x + 3 > 0$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (ج) هي نفس حلول المتراجحة  $2 - e^x \geq 0$

$$2 - e^x \geq 0 \quad \text{تعني} \quad e^x \leq 2$$

$$\text{مجموعة حلول المتراجحة} \quad e^x \leq 2 \quad \text{هي} \quad ]-\infty, \ln(2)]$$

$$\text{إذن مجموعة حلول المتراجحة (ج) هي} \quad S = ]-\infty, \ln(2)]$$

$$(د) \quad \frac{e^x - 1}{e^x} \geq 0 \quad \text{تكافئ} \quad e^x - 1 \geq 0 \quad \text{أي} \quad e^x \geq 1$$

مجموعة حلول المتراجحة  $e^x \geq 1$  هي  $[0, +\infty[$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (د) هي  $S = [0, +\infty[$



(هـ) مجموعة حلول التراجحة  $e^{-x^2-x} \leq 1$  هي نفسها مجموعة حلول التراجحة  $-x^2-x \leq 0$  ولكن مجموعة حلول التراجحة  $-x^2-x \leq 0$  هي  $]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$  هي إذن مجموعة حلول التراجحة (هـ) هي  $S = ]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$  (و) التراجحة (و) تكتب على الشكل  $\frac{(e^x-3)(e^x+3)}{e^x} > 0$

وبما أن  $\frac{e^x+3}{e^x} > 0$  فإن مجموعة حلول التراجحة (و) هي نفسها مجموعة حلول التراجحة  $(e^x-3) > 0$  وهذه الأخيرة مجموعة حلولها هي  $Ln(3), -\infty, ]$  إذن مجموعة حلول التراجحة (و) هي  $S = ]Ln(3), +\infty[$

## تطبيق 7

تعيين مجموعة حلول معادلات و متراجحات

- (1) عين جذور كثيرة الحدود من الدرجة الثانية حيث  $p(x) = x^2 + 4x - 5$
- (2) استنتج حلول المعادلة  $(E) \quad e^{2x} + 4e^x = 5$
- (3) حل التراجحة التالية  $(E') \quad e^{2x} + 4e^x - 5 \leq 0$

## الحل

- (1)  $\Delta = 16 - 4 = 12$   $(1) \quad (-5) = 36$   $\Delta > 0$  فإن  $p(x)$  جذرين هما 1 و -5
- (2) بوضع  $X = e^x$  المعادلة (E) تكتب  $X^2 + 4X - 5 = 0$  ومن السؤال الأول نجد أن  $X = 1$  أو  $X = -5$   $X = -5$  مرفوض لأن  $X > 0$   $X = 1$  يكافئ  $e^x = 1$  يكافئ  $x = 0$  ومنه مجموعة حلول المعادلة (E) هي  $S = \{0\}$
- (3) التراجحة (E') تكتب على الشكل  $(e^x-1)(e^x+5) \leq 0$  بما أن  $e^x+5 > 0$  فإن مجموعة حلول (E') هي نفسها مجموعة حلول التراجحة  $e^x-1 \leq 0$   $e^x-1 \leq 0$  يكافئ  $x \leq 0$  إذن مجموعة حلول التراجحة (E') هي  $S = ]-\infty, 0]$

## تطبيق 8

تعيين مجموعة حلول معادلات و متراجحات

- (1)  $\frac{e^{3x+1}+4}{e^{2x}-1} = 4$  (ب)  $e^{3x+1} + 4e^{2x+3} - 5e^{x+2} = 0$

$$\frac{e^{x+1}-1}{e^{2x+2}+1} \leq \frac{e^{x+1}-2}{e^{x+1}+2} \quad (د) \quad e^{2x} - (e^2-1)e^{2x} = e^{x+2} \quad (ج) \quad 4e^{2x} - e^{2x} \leq 3 \quad (هـ)$$

## الحل

(1) مجموعة تعريف المعادلة (1) هي  $\mathbb{R} - \{0\}$

المعادلة (1) تكتب على الشكل  $4e^{2x} - 5e^x - 1 = 0$  ... (1')

بوضع  $X = e^x$  المعادلة (1) تكتب على الشكل  $4X^2 - 5X - 1 = 0$

وحلا هذه الأخيرة هما  $X_1 = \frac{5+\sqrt{39}}{8}$  و  $X_2 = \frac{5-\sqrt{39}}{8}$

$X_2$  حل مرفوض لأنه سالب.

$X = X_1$  يكافئ  $e^x = X_1$  ومنه  $x = Ln(X_1)$

إذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي  $S = \{Ln(X_1)\}$

(ب) مجموعة تعريف المعادلة (ب) هي  $\mathbb{R}$ .

بضرب المعادلة (ب) في  $e^{-2}$  نجد (1)  $e^{3x+2} + 4e^{2x+1} - 5e^x = 0$  ... (1')

وبوضع  $X = e^x$  تصبح المعادلة (1) كما يلي  $e^{2X^3} + 4eX^2 - 5X = 0$  ... (1')

$X(e^2X^2 + 4eX - 5) = 0$  تكافئ  $e^2X^3 + 4eX^2 - 5X = 0$

يكافئ  $(X=0)$  أو  $(e^2X^2 + 4eX - 5 = 0)$

يكافئ  $(X=0)$  أو  $(X=\frac{1}{e})$  أو  $(X=\frac{-5}{e})$

$X = \frac{-5}{e}$  مرفوض لأنه سالب و  $X=0$  مرفوض لأنه معدوم.

$X = \frac{1}{e}$  يكافئ  $e^x = \frac{1}{e}$  يكافئ  $x = -1$

إذن مجموعة حلول المعادلة (ب) هي  $S = \{-1\}$

(ج) بوضع  $X = e^x$  المعادلة (ج) تصبح كما يلي  $X^3 - (e^2-1)X^2 - e^2X = 0$

وهذه الأخيرة تكتب على الشكل  $X^2 - (e^2-1)X - e^2 = 0$  لأن  $X > 0$

حلا المعادلة  $X^2 - (e^2-1)X - e^2 = 0$  هما  $e^2$  و  $-1$

بما أن  $X > 0$  فإن  $-1$  مرفوض.

$X = e^2$  يكافئ  $e^x = e^2$  منه  $x = 2$

إذن مجموعة حلول المعادلة (ج) هي  $S = \{2\}$

(د) مجموعة تعريف المعادلة (د) هي  $\mathbb{R}$

بوضع  $X = e^{x+1}$  التراجحة (د) تكتب  $\frac{X-1}{X^2+1} \leq \frac{X-2}{X+2}$



الدالة الأسية

(ب) لدينا  $x+y=1$  منه  $y=1-x$  وبتعويض عبارة  $y$  في المعادلة  $e^x + e^y = e+1$

$$\text{نجد } (*) \quad e^{2x} - (e+1)e^x + e = 0$$

بوضع  $X = e^x$  المعادلة (\*) تكتب  $X^2 - (e+1)X + e = 0$  وحلا هذه الأخيرة هما  $e$  و  $1$

$$X=1 \text{ يكافئ } e^x=1 \text{ يكافئ } x=0$$

$$X=e \text{ يكافئ } e^x=e \text{ يكافئ } x=1$$

لما  $x=0$  نجد  $y=1$  ولما  $x=1$  نجد  $y=0$

ومنه مجموعة حلول الجملة (ب) هي  $S = \{(0,1), (1,0)\}$

$$\text{(ج) الجملة (ج) تكتب على الشكل } \begin{cases} xy = -2 \\ e^{4x+y} = e^{-2} \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} xy = -2 \\ 4x+y = -2 \end{cases}$$

من المساواة  $xy = -2$  نجد  $y = -\frac{2}{x}$  مع  $x \neq 0$

نعوض عبارة  $y$  في المعادلة  $4x+y = -2$  نجد  $4x - \frac{2}{x} = -2$

بالتبسيط نجد  $4x^2 + 2x - 2 = 0$  وحلا هذه الأخيرة هما  $\frac{1}{2}$  و  $-1$

لما  $x = \frac{1}{2}$  نجد  $y = -4$  ولما  $x = -1$  نجد  $y = 2$

إذن مجموعة حلول الجملة (ج) هي  $\left\{\left(\frac{1}{2}, -4\right), (-1, 2)\right\}$

تطبيق 10 حساب نهايات دالة

عين نهاية الدالة  $f$  عند العدد العطي في كل حالة من الحالات التالية :

$$(أ) \quad f(x) = \frac{e^x - 1}{3x} \text{ عند } 0 \text{ و } (+\infty) \text{ و } (-\infty)$$

$$(ب) \quad f(x) = 5xe^{-x} \text{ عند } -\infty$$

$$(ج) \quad f(x) = \frac{2e^x - 2}{2x - 2} \text{ عند } +\infty \text{ و } (-\infty)$$

$$(د) \quad f(x) = e^{2x} - \frac{1}{e^x} + 1 \text{ عند } (+\infty) \text{ و } (-\infty)$$

$$(هـ) \quad f(x) = 2x - 1 + e^{-x} \text{ عند } (-\infty)$$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \times \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{3}$$

$$(أ) \quad \frac{-X^2(X-3)}{(X^2+1)(X+2)} \leq 0$$

وبما أن  $\frac{X^2}{(X^2+1)(X+2)} > 0$  فإن مجموعة حلول المتراجحة (أ) هي نفس مجموعة

حلول المتراجحة  $-(X-3) \leq 0$  أي  $X \geq 3$

$X \geq 3$  يكافئ  $e^{2x} \geq 3$  يكافئ  $x+1 \geq \ln 3$  يكافئ  $x \geq -1 + \ln 3$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (د) هي  $S = [-1 + \ln 3, +\infty[$

(هـ) بضرب طرفي المتراجحة (هـ) في  $e^{2x}$  نجد  $4e^{4x} - 3e^{2x} - 1 \leq 0$  ... (1)

وبوضع  $X = e^{2x}$  تصبح المتراجحة (1) كما يلي  $4X^2 - 3X - 1 \leq 0$  ... (أ')

ومجموعة حلول المتراجحة (أ') هي  $[0, 1]$

$X \in [0, 1]$  يكافئ  $e^x > 0$  يكافئ  $x < 0$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (هـ) هي  $S = ]-\infty, 0[$

تطبيق 9

تعيين مجموعة حلول جملة معادلتين

حل الجملة التالية :

$$(أ) \quad \begin{cases} 2e^x - e^y = e \\ e^x + 2e^y = 1 \end{cases} \quad (ب) \quad \begin{cases} e^x + e^y = e+1 \\ x+y=1 \end{cases} \quad (ج) \quad \begin{cases} xy = -2 \\ e^{4x} \times e^y = \frac{1}{e^2} \end{cases}$$

الحل

(أ) بوضع  $X = e^x$  و  $Y = e^y$  الجملة (أ) تصبح كما يلي

بضرب المعادلة (أ) في العدد 2 تصبح الجملة كما يلي

$$(أ') \quad \begin{cases} 4X - 2Y = 2e \\ X + 2Y = 1 \end{cases}$$

$$(ب') \quad \begin{cases} 2X - Y = e \\ X + 2Y = 1 \end{cases}$$

بجمع طرفي المعادلتين (أ') و (ب') طرفا لطرف نجد  $5X = 1 + 2e$  ومنه  $X = \frac{1+2e}{5}$

وبتعويض قيمة  $X$  في المعادلة (ب') نجد  $Y = \frac{1-X}{2} = \frac{2-e}{5}$

$X = \frac{1+2e}{5}$  يكافئ  $e^x = \frac{1+2e}{5}$  يكافئ  $x = \ln\left(\frac{1+2e}{5}\right)$

$Y = \frac{2-e}{5} < 0$  ومنه  $y$  غير موجود وبالتالي الجملة (أ) ليس لها حلولا في  $\mathbb{R}^2$



✓ الحل

(أ) الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق  $\mathbb{R}$  لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  هما  $x \mapsto e^x$  و  $x \mapsto (x^2 - 3x)$  ولدينا  $f'(x) = 2xe^x + e^x(x^2 - 3x) = e^x(x^2 - x)$

(ب) الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق  $\mathbb{R} - \{1\}$  ولدينا  $f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$

(ج) الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق  $\mathbb{R}$

ولدينا  $f'(x) = e^x \times \frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} (e^x - 1) = \frac{e^x - e^{-x} + 2}{(1+e^{-x})^2}$

(د) الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R} - \{-1\}$

ولدينا  $f'(x) = \frac{e^x(x+1) - (e^x - 1)}{(x+1)^2} = \frac{x e^x + 1}{(x+1)^2}$

(هـ) الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  هما  $x \mapsto e^x$  و  $x \mapsto \cos x$

ولدينا  $f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x(\cos x - \sin x)$

تطبيق 12 بحجة دراسة استمرارية وقابلية اشتقاق دالة عند عدد

$$\begin{cases} f(x) = 2e^{x-1} - 1 & , x \leq 1 \\ f(x) = 2 - x & , x > 1 \end{cases}$$

(1) عين مجموعة التعريف الدالة  $f$

(2) ادرس استمرارية  $f$  عند  $x=1$

(3) ادرس قابلية اشتقاق  $f$  عند  $x=1$

✓ الحل

(أ) الدالة  $x \mapsto 2e^{x-1} - 1$  معرفة على  $\mathbb{R}$  بالتالي فهي معرفة على  $]-\infty, 1]$

والدالة  $x \mapsto 2 - x$  معرفة على  $\mathbb{R}$  فهي معرفة على  $]1, +\infty[$ .

إذن الدالة  $f$  معرفة على  $]-\infty, 1] \cup ]1, +\infty[$  أي معرفة على  $\mathbb{R}$ .

(2)  $f$  مستمرة عند 1 يعني أن  $1 \in D_f$  و  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2 - x) = 1 = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2e^{x-1} - 1) = 1 = f(1)$$

إذن  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$  و عليه فإن  $f$  مستمرة عند العدد 1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 - \frac{1}{e^x})}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^x}{x} \right) \times \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{3} = \frac{1}{3} \text{ لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = -1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) \times \frac{1}{3x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 5xe^{-x} = -\infty \text{ (ب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x - 2}{2x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \left[ \frac{2 - \frac{2}{e^x}}{2 - \frac{2}{e^x}} \right] = +\infty \text{ (ج)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{2}{e^x}}{2 - \frac{2}{e^x}} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - 2) \times \frac{1}{2x - 2} = 0 -$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x - 2} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - 2) = -2 \text{ لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( e^{2x} - \frac{1}{e^{-x}} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} (1 - e^{-x} + e^{-2x}) = +\infty \text{ (د)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0 \text{ لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-2x}} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( e^{2x} - \frac{1}{e^{-x}} + 1 \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[ 2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{xe^x} \right] = +\infty \text{ (هـ)}$$

بحجة حساب العدد المشتق

تطبيق 11

عين المجال الذي تكون فيه الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق ثم احسب  $f'(x)$  في كل

حالة من الحالات التالية: (أ)  $f(x) = (x^2 - 3x)e^x$  (ب)  $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$

(ج)  $f(x) = \frac{e^x - 1}{1 + e^{-x}}$  (د)  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x+1}$  (هـ)  $f(x) = e^x \cos x$



(ج) الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا  $f'(x) = -\frac{(e^x-1)^2}{(1+e^x)^2}$

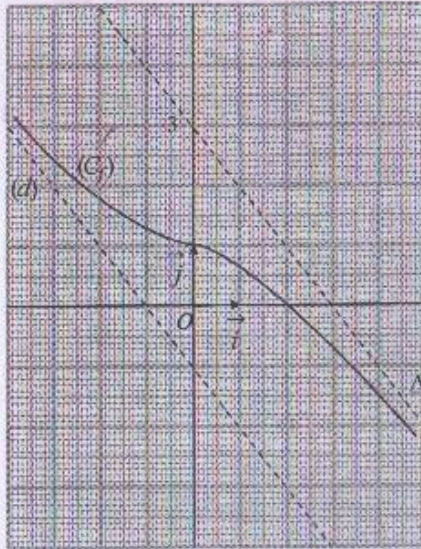
$e^x - 1 = 0$  تكافئ  $f'(x) = 0$

يكافئ  $x = 0$

من أجل كل  $x \neq 0$

يكون  $f'(x) < 0$

إذن الدالة  $f$  متناقصة تماما على  $\mathbb{R}$ .



$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	-	0	-
تغيرات $f$	$+\infty \searrow -\infty$		

$f'(x)$  يتعدم عند  $x=0$

ولا يغير إشارته

ومنه النقطة  $A(0,1)$

هي نقطة إنعطاف لـ  $(C_f)$

تعيين عبارة دالة ثم رسم تمثيلها البياني

تطبيق 14

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = 2e^x + ax + b$  .  $(\gamma)$  تمثيلها

البياني في معلم متعامد ومتجانس حيث  $a$  و  $b$  حقيقيان.

(1) عين  $a$  و  $b$  بحيث المنحني  $(\gamma)$  يمر من النقطة  $o(0,0)$  ومعامل توجيه

الماس لـ  $(\gamma)$  عند النقطة  $o$  هو  $-2$

(2) من أجل الدالة المحصل عليها سابقا.

(1) عين نهاية الدالة  $f$  عند  $(+\infty)$  و  $(-\infty)$

(ب) شكل جدول تغيرات الدالة  $f$

(ج) استنتج أن للمعادلة  $f(x) = 0$  حلين أحدهما  $0$  والآخر  $\alpha$  حيث  $1 < \alpha < 2$

(د) عين إشارة  $f(x)$  حسب قيم  $x$ .

(هـ) بين أن المستقيم  $(d)$  ذا المعادلة  $y = -4x - 2$  مقارب مائل لجوار  $(-\infty)$

ثم ادرس وضعية  $(d)$  بالنسبة إلى  $(\gamma)$  ثم ارسم  $(\gamma)$  و  $(d)$

الحل

(1) - يمر من النقطة  $o(0,0)$  يعني أن  $f(0) = 0$

(3)  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $1$  يعني أن  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \ell$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2e^{x-1} - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} 2 \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} = \lim_{X \rightarrow 0} 2 \frac{e^X - 1}{X} = 2 = \ell_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{x - 1} = -1 = \ell_2$$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$  فإن  $f$  غير قابلة للاشتقاق عند  $1$

المستقيم المقارب المائل - التمثيل البياني

تطبيق 13

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بالعبارة  $f(x) = -x - 1 + \frac{4e^x}{1+e^x}$  و  $(\gamma)$  تمثيلها

البياني في معلم متعامد ومتجانس.

(1) عين نهاية  $f$  عند  $(+\infty)$  و  $(-\infty)$

(2) بين أن المستقيم  $(d)$  ذا المعادلة  $y = -x - 1$  مقارب لـ  $(\gamma)$  مائل بجوار  $-\infty$

(ب) بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = -x + 3$  مقارب مائل لـ  $(\gamma)$  بجوار  $+\infty$

(ج) شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  ثم ارسم  $(\gamma)$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -x - 1 + \frac{4e^x}{1+e^x} \right) = +\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -x - 1 + \frac{4e^x}{1+e^x} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x - 1) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^x}{1+e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{1+e^{-x}} = 4$$

$$(1) (2) \text{ (د) مستقيم مقارب مائل لـ } (\gamma) \text{ بجوار } (-\infty) \text{ يعني } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x - 1)] = 0$$

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^x}{1+e^x} = 0 \text{ فإن (د) مقارب مائل لجوار } (-\infty)$$

$$(ب) (\Delta) \text{ مستقيم مقارب مائل لـ } (\gamma) \text{ بجوار } (+\infty) \text{ يعني } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x + 3)] = 0$$

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x + 3)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ -4 + \frac{4e^x}{1+e^x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{1+e^x} = 0$$

فإن  $(\Delta)$  مستقيم مقارب مائل لجوار  $(+\infty)$







✓ الحل

(1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{1+x} = -1$

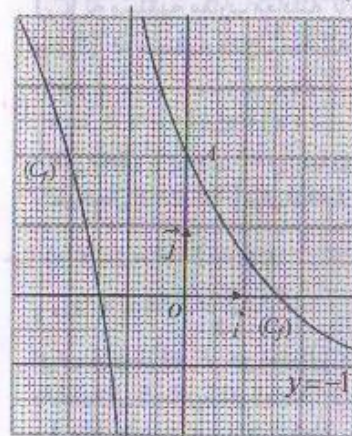
$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow -1} e^{-x} = e$  و  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x}{1+x} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow -1} e^{-x} = e$  و  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x}{1+x} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$  لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{1+x} = -1$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

(2) الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $D_f$  ولدينا  $f'(x) = -e^{-x} - \frac{2}{(1+x)^2}$

من أجل كل  $x$  من  $D_f$  يكون  $f'(x) < 0$  ومنه  $f$  متناقصة تماما على كل من المجالين  $]-\infty, -1[$  و  $] -1, +\infty [$



$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	-	-	-
تغيرات $f$	$+\infty$ ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ $-1$

$y = -1$  مستقيم مقارب أفقي بجوار  $(+\infty)$   
 $A(0, 2)$  في النقطة  $(y, y)$  يقطع  $(y, y)$

## تطبيق 17

رسم تمثيل بياني لدالة و حل معادلات

$f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  بالعلاقة  $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$  و  $(\gamma)$  منحناها البياني

في معلم متعامد و متجانس.

(1) ادرس تغيرات الدالة  $f$  ثم أرسم منحناها البياني.

(2) عند حقيقي.

(أ) بين أن المعادلة  $f(x) = m$  لها حل وحيد  $\alpha$  على  $\mathbb{R}$ .

(ب) بين أن المعادلة  $f(x) = m$  تكافئ  $e^{2x} - 2me^x - 1 = 0$

(ج) استنتج أن  $\alpha = \ln(m + \sqrt{m^2 + 1})$

✓ الحل

(1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -e^{-x} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-x} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا  $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	+	+
تغيرات $f$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا  $f'(x) > 0$  لأن  $e^x > 0$  و  $e^{-x} > 0$   
إذن الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$   
-  $(\gamma)$  يقطع  $(y, y)$  في  $O(0, 0)$

(2) أ) بما أن  $f'(x) > 0$  من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  و  $m \in ]-\infty, +\infty[$  فإن المعادلة  $f(x) = m$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  على  $\mathbb{R}$ .

(ب)  $f(x) = m$  يكافئ  $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = m$  يكافئ  $e^{2x} - 2me^x - 1 = 0$

(ج) بوضع  $e^x = X$  المعادلة  $e^x = X$  تصبح (1)  $X^2 - 2mX - 1 = 0$  و مميزها

هو  $\Delta = 4m^2 + 4$

بما أن  $\Delta > 0$  فإن للمعادلة (1) لها حلين هما

$$X_1 = m + \sqrt{m^2 + 1}$$

$$X_2 = m - \sqrt{m^2 + 1}$$

بما أن  $m^2 > m^2 + 1$  فإن  $X_2 < 0$

وبالتالي فهو مرفوض.

إذن المعادلة (1) لها حل وحيد  $X_1 = m + \sqrt{m^2 + 1}$ .

$X = X_1$  يكافئ  $x = \ln(X_1)$  يكافئ  $x = \ln(m + \sqrt{m^2 + 1})$

بما أن  $x$  هو الحل الوحيد للمعادلة  $e^{2x} - 2me^x - 1 = 0$  فإنه هو الحل الوحيد لـ

$f(x) = m$  إذن  $\alpha = \ln(m + \sqrt{m^2 + 1})$

## تطبيق 18

رسم تمثيل بياني لدالة و حل معادلات

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بالعلاقة  $f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$  و  $(\gamma)$  تمثيلها البياني في

معلم متعامد و متجانس.



(1) تحقق أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $f(x)$  يكتب على الشكل

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1} \text{ و } f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}$$

(ب) ادرس نهايات  $f$  عند  $(+\infty)$  و  $(-\infty)$

(ج) بين أن المستقيمين  $(d_1)$  و  $(d_2)$  حيث  $y = x + 1$  و  $y = x - 1$

$(d_2)$  مقاربان لـ  $(\gamma)$  عند  $(-\infty)$  و  $(+\infty)$  على التوالي

(د) عين الوضع النسبي لـ  $(\gamma)$  بالنسبة إلى  $(d_1)$  و  $(d_2)$

(2) بين أن الدالة  $f$  فردية.

(ب) ادرس تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $[0, +\infty[$

(3) ارسم  $(d_1)$ ،  $(d_2)$  و  $(\gamma)$  والمماس لـ  $(\gamma)$  عند النقطة ذات الفاصلة  $x = 0$

(4) بين أن المعادلة  $f(x) = 1$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  محددا حصره له بتقريب 0,1

✓ الحل

$$f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = x - \frac{e^x + 1 - 2}{e^x + 1} = x - \frac{e^x + 1}{e^x + 1} + \frac{2}{e^x + 1} = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1} \quad (1)$$

$$x + 1 - \frac{2e^x}{1 + e^x} = x + \frac{1 + e^x - 2e^x}{1 + e^x} = x + \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x + 1 - \frac{2e^x}{1 + e^x} \right) = -\infty \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - 1 + \frac{2}{e^x + 1} \right) = +\infty$$

(ج)  $(d_1)$  مستقيم مقارب مائل لـ  $(\gamma)$  في جوار  $(-\infty)$  يعني أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 1) = 0$

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{2e^x}{e^x + 1} = 0 \text{ فإن } (d_1) \text{ مقارب مائل بجوار } (-\infty)$$

$$(d_2) \text{ مقارب مائل لـ } (\gamma) \text{ في جوار } (+\infty) \text{ يعني أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = 0$$

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 0 \text{ فإن } (d_2) \text{ مقارب مائل بجوار } (+\infty)$$

$$(\text{د}) \text{ بما أن } f(x) - (x + 1) = -\frac{2e^x}{e^x + 1} < 0 \text{ فإن النحني } (\gamma) \text{ يقع تحت المستقيم } (d_1)$$

$$\text{بما أن } f(x) - (x - 1) = \frac{2}{e^x + 1} > 0 \text{ فإن النحني } (\gamma) \text{ يقع فوق المستقيم } (d_2)$$

(2)  $f$  فردية يعني أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$

$$f(-x) = -f(x) \text{ و } f \text{ ينتمي إلى } \mathbb{R}$$

$$f(-x) = -x - \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = -x - \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1} = -x - \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = -x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -f(x)$$

إذن  $f$  دالة فردية.

(ب) بما أن  $f$  فردية فإننا نقتصر دراستها

على المجموعة  $D_f \cap \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $[0, +\infty[$

$$\text{ولدينا } f'(x) = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2} > 0$$

و منه  $f$  متزايدة تماما على  $[0, +\infty[$

(3) معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة

$$x = 0 \text{ هي } y = \frac{1}{2}x$$

بما أن  $f$  فردية نرسم بيانها على المجال

$[0, +\infty[$  ونتم رسم الجزء الآخر

بالتناظر بالنسبة إلى المركز  $O$ .

(4) بما أن  $f'(x) > 0$  من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$

و  $1 \in \mathbb{R}$  فإن المعادلة  $f(x) = 1$  لها حل

وحيد  $\alpha$  على  $\mathbb{R}$

$$f(1) - 1 = -\frac{e - 1}{e + 1} < 0$$

$$f(2) - 1 = 1 - \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} > 0$$

$$(f(2) - 1) \times (f(1) - 1) < 0$$

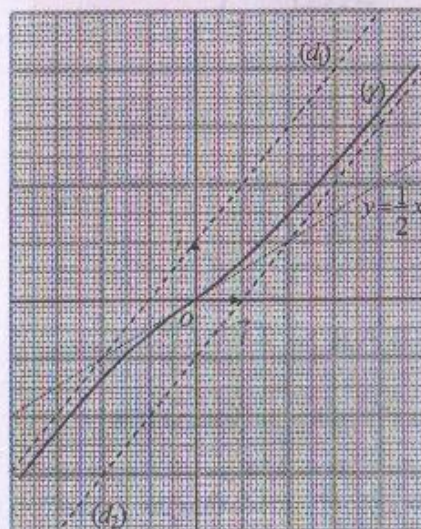
و منه  $\alpha$  تنتمي إلى المجال  $]1, 2[$

نستعمل طريقة المسح بخطوة قدرها  $P = 0,1$

فنحصل على الجدول المجاور

و منه  $1,0 < \alpha < 1,1$

$x$	0	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	+	
تغيرات $f$	0	$+\infty$



$x$	$y$
1	$-\frac{e-1}{e+1}$
1,1	0,6

### تطبيق 19 دراسة قابلية اشتقاق دالة ورسم التمثيل البياني

$f$  معرفة على  $[0, +\infty[$  بـ  $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$  من أجل  $x > 0$

و  $f(0) = 0$ ،  $(\gamma)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

(1) بين أن المستقيم  $(d)$  ذا المعادلة  $y = 1$  مقارب لـ  $(\gamma)$

(2) من أجل كل  $x > 0$  نضع  $t(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$

ادرس نهاية  $t(x)$  عند الصفر. ثم استنتج أن  $f$  قابلة للاشتقاق عند الصفر



- (2) تحقق أنه من أجل كل  $x > 0$  يكون  $f(x) - x - 1 = \frac{e^x - 1}{x} - 1$  (ب) استنتج نهاية  $(f(x) - x - 1)$  عند  $(+\infty)$  وبين أن المستقيم  $(d)$  ذا المعادلة  $y = x + 1$  مقارب مائل لـ  $(\gamma)$ . (تقبل أن من أجل  $x > 0$  يكون  $(d)$  تحت  $(\gamma)$ ) (3) ادرس تغيرات الدالة  $f$  على  $]0, +\infty[$  مشكلاً جدول تغيراتها (II) (1) عيّن نهايات الدالة  $f$  على أطراف المجال  $]0, +\infty[$  (2) بين أن المستقيم ذا المعادلة  $y = x + 1$  مقارب مائل لـ  $(\gamma)$  بجوار  $(-\infty)$  (تقبل أن من أجل كل  $x < 0$  فإن  $(d)$  يقع فوق  $(\gamma)$ ) (3)  $g$  دالة معرفة على  $]-\infty, 0[$  بـ  $\begin{cases} g(x) = f(x) & x < 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$  (1) حدد نهاية  $\frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$  لما  $x$  يؤول إلى 0. (ب) استنتج أن  $g$  قابلة للاشتقاق عند الصفر. (ج) ادرس تغيرات  $g$  على  $]-\infty, 0[$  مشكلاً جدول تغيراتها ثم ارسم  $(\gamma)$ .

الحل

$$(1) \quad (X = \frac{1}{x} \text{ مع}) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X}{X} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$f(x) - x - 1 = x e^{\frac{1}{x}} - x - 1 = x \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) - 1 = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} - 1 \quad (2)$$

$$(ب) \quad (X = \frac{1}{x} \text{ مع}) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x - 1] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} - 1 \right] = \lim_{X \rightarrow 0} \left[ \frac{e^X - 1}{X} - 1 \right] = 0$$

إذن فالمستقيم ذو المعادلة  $y = x + 1$  مقارب مائل لـ  $(\gamma)$  بجوار  $(+\infty)$ .

$x$	0	1	$+\infty$
إشارة $f'(x)$		-	+
تغيرات $f$		$+$	$+$

(3) الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[$

$$\text{ومن أجل } x > 0 \text{ لدينا } f'(x) = \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ يكافئ } x = 1$$

$$\text{إذا كان } x > 1 \text{ فإن } f'(x) > 0$$

$$\text{ومنه } f \text{ متزايدة تماماً على } [1, +\infty[$$

$$\text{إذا كان } x < 1 \text{ فإن } f'(x) < 0 \text{ منه } f \text{ متناقصة تماماً على } ]0, 1]$$

$$(3) \quad (1) \text{ بين أنه من أجل كل } x > 0 \text{ يكون } f'(x) = \frac{1-x}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$$

(ب) ادرس تغيرات  $f$  مشكلاً جدول تغيراتها ثم ارسم  $(d)$  و  $(\gamma)$

الحل

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$$

إذن فالمستقيم  $(d)$  ذو المعادلة  $y = 1$  مقارب لـ  $(\gamma)$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x + 1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{وبوضع } X = \frac{1}{x} \text{ نجد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} - \left( -X e^{-X} \right) + 4 \left( -\frac{1}{2} X e^{-\frac{1}{2}X} \right)^2 - 27 \left( -\frac{1}{3} X e^{-\frac{1}{3}X} \right)^3 = 0$$

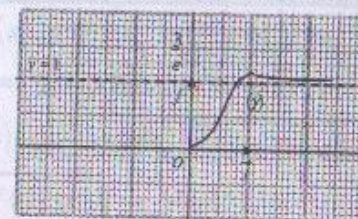
$$\text{لأن} \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} (-X e^{-X}) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} X e^{-\frac{1}{2}X} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{3} X e^{-\frac{1}{3}X} \right) = 0$$

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \text{ فإن } f \text{ قابلة للاشتقاق عند الصفر والعدد المشتق هو } f'(0) = 0$$

$$(3) \quad (1) \quad f \text{ قابلة للاشتقاق على } ]0, +\infty[ \text{ و من أجل كل } x > 0 \text{ لدينا } f'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}(1-x)}{x^4}$$

(ب) إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $1-x$   
الدالة  $f$  متزايدة تماماً على  $[0, 1]$  و متناقصة تماماً على  $[1, +\infty[$ .

$x$	0	1	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	+	0	-
تغيرات $f$		$\nearrow$	$\searrow$



تطبيق 20 دراسة قابلية اشتقاق دالة ورسم التمثيل البياني

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{0\}$  بالعبارة  $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$  و  $(\gamma)$  تمثيلها

البياني في معلم متعامد ومتجانس  $(0, 1, 1)$ .

(I) عيّن نهاية  $f$  على أطراف المجال  $]0, +\infty[$ .



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x}} = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x}} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} - 1 \right] = 0 \quad (2)$$

إذن فالستقيم ذو المعادلة  $y = x + 1$  مقارب مائل لـ  $(\gamma)$  بجوار  $(-\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = 0 \quad (3)$$

(ب) بما أن  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = 0$

فإن  $g$  قابلة للاشتقاق عند الصفر.

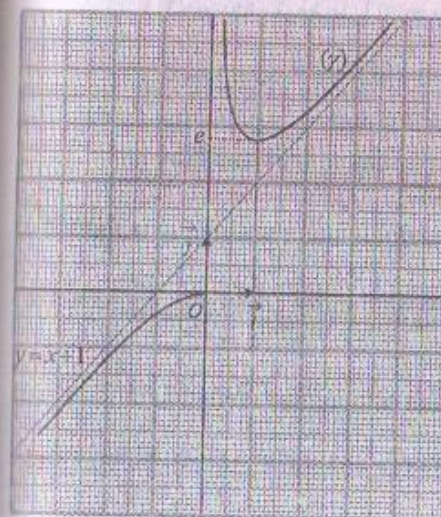
(ج) الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $]-\infty, 0[$

ومن أجل كل  $x < 0$  لدينا  $g'(x) = \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}}$

من أجل  $x < 0$  لدينا  $g'(x) > 0$

ومنه  $g$  متزايدة تماما على المجال:

$]-\infty, 0[$



$x$	$-\infty$	$0$
إشارة $g'(x)$	$+$	
تغيرات $g$		$\nearrow 0$

### تمثيل البياني لدالة وحل معادلات

### تطبيق 1

1) دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بالصيغة  $g(x) = e^x + x + 1$

أدرس تغيرات الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$

2) بين أن للمعادلة  $g(x) = 1$  حلا وحيدا  $\alpha$  على  $\mathbb{R}$  يطلب إيجاد حضرا له

3) استنتج إشارة  $g$  على  $\mathbb{R}$

II دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بالصيغة  $f(x) = \frac{x e^x}{e^x + 1}$  و  $(\gamma)$  تمثيلها البياني في

محطة متعامدات متجانس

(1) بين أن  $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$  ثم استنتج تغيرات  $f$  على  $\mathbb{R}$

(2) بين أن  $f(\alpha) = \alpha + 1$  ثم استنتج حضرا لـ  $f(\alpha)$

(3) عين معادلة للمماس  $(d)$  لـ  $(\gamma)$  عند النقطة ذات الفاصلة صفر ثم ادرس

الوضع النسبي لـ  $(d)$  و  $(\gamma)$

(4) عين نهاية  $f'$  عند  $(-\infty)$  ثم اعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

(5) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم بين أن الستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = x$  مقارب مائل

لـ  $(\gamma)$  في حوار  $(+\infty)$

(6) ادرس وضعية  $(\gamma)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$  ثم ارسم  $(d)$  و  $(\Delta)$  و  $(\gamma)$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \quad (1)$$

الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$

ولدينا  $g'(x) = e^x + 1$

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا  $g'(x) > 0$

ومنه  $g$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
إشارة $g'(x)$		$+$
تغيرات $g$	$-\infty$	$+\infty$

(2) بما أن  $g'(x) > 0$  من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  و  $0 \in \mathbb{R}$

فإن للمعادلة  $g(x) = 0$  لها حل وحيد  $\alpha$  على  $\mathbb{R}$

بما أن  $f(-1) = \frac{1}{e} > 0$  و  $f(-2) = \frac{1}{e^2} - 1 < 0$  فإن  $-1 < \alpha < -2$

(3) إذا كان  $x > \alpha$  فإن  $g(x) > 0$  وإذا كان  $x < \alpha$  فإن  $g(x) < 0$

II الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا

$$f'(x) = \frac{(e^x + x e^x)(1 + e^x) - e^x x e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x [(1+x)(1+e^x) - x e^x]}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} g(x)$$

إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $g(x)$  لأن  $\frac{e^x}{(1 + e^x)^2} > 0$

وعليه إذا كان  $x > \alpha$  فإن  $f'(x) > 0$  وإذا كان  $x < \alpha$  فإن  $f'(x) < 0$

وإذا كان  $x = \alpha$  فإن  $f'(\alpha) = 0$

(2)  $g(\alpha) = 0$  يكافئ  $e^\alpha + \alpha + 1 = 0$  يكافئ  $e^\alpha = -\alpha - 1$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha e^\alpha}{1 + e^\alpha} = \frac{\alpha(-\alpha - 1)}{1 - \alpha - 1} = \frac{\alpha(-\alpha - 1)}{-\alpha} = \alpha + 1$$



## تطبيق 22

تطبيق الدوال والحل الهندسي

في معلم متعامد ومتجانس نعتبر النحنيين  $(\gamma_1)$  و  $(\gamma_2)$  الممثلين للدالتين  $x \rightarrow e^x$  و  $x \rightarrow e^{-x}$ .

نرفق بكل عدد حقيقي  $m$  النقطة  $A(m, 0)$  ولتكن النقطتين  $M$  و  $N$  من النحنيين  $(\gamma_1)$  و  $(\gamma_2)$  على الترتيب فاصلتهما  $m$ .

(1) ارسم  $(\gamma_1)$  و  $(\gamma_2)$  في المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

(2)  $(T_1)$  و  $(T_2)$  مماسان لـ  $(\gamma_2)$  و  $(\gamma_1)$  في النقطتين  $M$  و  $N$  على التوالي. أوجد معادلة كل من  $(T_1)$  و  $(T_2)$  ثم بين أن  $(T_1)$  و  $(T_2)$  متعامدان.

(3) المستقيمان  $(T_1)$  و  $(T_2)$  يتقاطعان في النقطة  $p$ . بين أن إحداثيتي  $p$  هي

$$y = \frac{2}{e^m + e^{-m}} \text{ و } x = m - \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}$$

(4) لتكن  $I$  منتصف القطعة المستقيمة  $[MN]$

(أ) أوجد بدلالة  $m$  إحداثيتي النقطة  $I$ .

(ب) أوجد المحل الهندسي للنقطة  $I$  لـ  $m$  يسمح  $\mathbb{R}$ .

(ج) ارسم مجموعة النقط  $I$  في نفس المعلم السابق.

الحل

(1)  $(\gamma_2)$  هو نظير  $(\gamma_1)$  بالنسبة إلى محور الترتيب

$$(T_1): y = e^m(x - m) + e^m$$

$$(T_2): y = -e^{-m}(x - m) + e^{-m}$$

$$(T_2) \text{ ميل } \times (T_1) \text{ ميل} = (-e^{-m}) \times e^m = -1$$

ومنه  $(T_1)$  و  $(T_2)$  متعامدان

$$(3) \text{ لدينا } e^m(x - m) + e^m = -e^{-m}(x - m) + e^{-m} \text{ و}$$

$$(e^m + e^{-m})x = m e^m - e^m + m e^{-m} + e^{-m}$$

$$x = \frac{m e^m - e^m + m e^{-m} + e^{-m}}{e^m + e^{-m}} = m - \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}} \text{ إذن}$$

$$\text{بالتعويض } x \text{ في عبارة } y \text{ نجد } y = \frac{2}{e^m + e^{-m}}$$

بإضافة 1 إلى أطراف المتباينة  $-1 < \alpha < 1$  نجد  $-1 < 1 + \alpha < 2$  إذن  $0 < f(\alpha) < 1$

(3) معادلة المماس لـ  $(\gamma)$  عند الصفر هي  $y = \frac{1}{2}x$  (d)

- دراسة الوضع النسبي لـ  $(\gamma)$  بالنسبة إلى (d)

$$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{x e^x}{1 + e^x} - \frac{1}{2}x = \frac{x e^x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x e^x}{1 + e^x} = \frac{\frac{1}{2}x e^x - \frac{1}{2}x}{1 + e^x} = \frac{\frac{1}{2}x(e^x - 1)}{1 + e^x}$$

إشارة  $f(x) - \frac{1}{2}x$  من إشارة المقدار  $\frac{1}{2}x(e^x - 1)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{2}x$	-	○	+
$e^x - 1$	-	○	+
$f(x) - \frac{1}{2}x$	+	○	+

من الجدول المجاور نستنتج

أن من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا:

$$f(x) - \frac{1}{2}x \geq 0$$

أي للنحني  $(\gamma)$  يقع فوق المستقيم (d)

و يمسه في النقطة  $o(0, 0)$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + e^x} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^x}{1 + e^x} = 0$$

النحني  $(\gamma)$  له مستقيم مقارب أفقي معادلته  $y = 0$  بجوار  $(-\infty)$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x - x - x e^x}{1 + e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{1 + e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = 0$$

إذن فالنستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = x$  مقارب مائل لـ  $(\gamma)$  بجوار  $(+\infty)$

$$(6) f(x) - x = \frac{x e^x}{1 + e^x} - x = \frac{x e^x - x - x e^x}{1 + e^x} = \frac{-x}{1 + e^x}$$

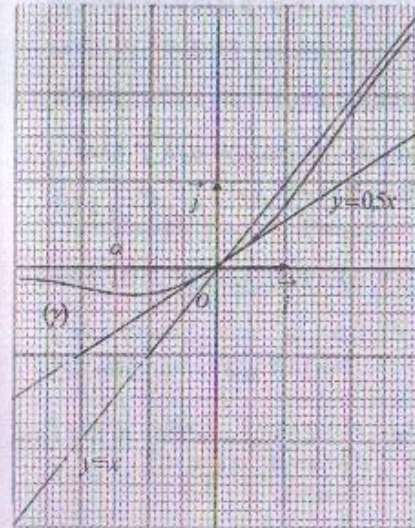
- إذا كان  $x > 0$  فإن  $f(x) - x < 0$

ومنه  $(\gamma)$  يقع تحت المستقيم  $(\Delta)$ .

- إذا كان  $x < 0$  فإن  $f(x) - x > 0$

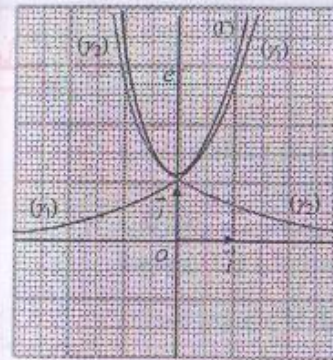
ومنه  $(\gamma)$  يقع فوق المستقيم  $(\Delta)$ .

النستقيم  $(\Delta)$  يقطع  $(\gamma)$  في النقطة  $o(0, 0)$ .



x	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	-	○	+
تغيرات $f$		↘	↗
		$f(\alpha)$	





$$y_1 = \frac{e^m + e^{-m}}{2} \text{ و } x_1 = \frac{x_M + x_N}{2} = m \quad (14)$$

$$I\left(m, \frac{e^m + e^{-m}}{2}\right) \text{ إذن}$$

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ نجد } m = x \text{ بوضع}$$

h	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $H(x)$	-	0	+
تغيرات h	$+\infty$	↓	$+\infty$

إذن المحل الهندسي للنقطة 1 هي المنحني الممثل للدالة  $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$  .  $x \rightarrow h$

### المشتقات المتتالية والمتتاليات

### تطبيق 23

f دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بالعبارة  $f(x) = (1-2x)e^{2x}$

$f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)}$  هي مشتقات متتالية لـ f حيث  $n \geq 1$ .

(1) عين  $f^{(2)}$  و  $f^{(3)}$

(2) بين بالتراجع أنه من أجل كل  $n \geq 1$  لدينا  $f^{(n)}(x) = 2^n(1-n-2x)e^{2x}$

(3) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، التمثيل البياني لـ  $f^{(n)}$  يقبل

مماسا افقيا في النقطة  $M_n$ .

(1) عين  $x_n$  و  $y_n$  إحداثيتا النقطة  $M_n$  وتحقق أن  $M_n$  تنتمي إلى المنحني (γ)

$$y = \frac{e^{2x}}{4^x}$$

(ب) بين أن المتتالية  $(x_n)$  حسابية، ما هي نهايتها؟

(ج) بين أن المتتالية  $(y_n)$  هندسية ثم ادرس نهايتها.

### الحل

$$f^{(0)}(x) = -2e^{2x} + 2e^{2x}(1-2x) = e^{2x}(-2+2-4x) = e^{2x}(-4x) = 2(-2x)e^{2x} \quad (1)$$

$$f^{(2)}(x) = (f^{(1)})' = 2e^{2x}(-4x) - 4e^{2x} = e^{2x}(-4-8x) = 2^2(-1-2x)e^{2x}$$

$$f^{(3)}(x) = (f^{(2)})' = 2e^{2x}(-4-8x) + (-8)e^{2x} = e^{2x}(-16-16x) = 2^3(-2-2x)e^{2x}$$

(2) نسمي  $P_n$  الخاصية " $f^{(n)}(x) = 2^n(1-n-2x)e^{2x}$ "

$P_1$  صحيحة لأن  $f^{(1)}(x) = 2^1(1-1-2x)e^{2x}$

نفرض أن  $P_n$  صحيحة من أجل عدد طبيعي غير معدوم n

ونبرهن أن  $P_{n+1}$  صحيحة أي  $f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' = [-2e^{2x} + 2e^{2x}(1-n-2x)]2^n = e^{2x}(-2+2-2n-4x) \times 2^n \\ &= 2^{n+1}e^{2x}(-n-2x) = 2^{n+1}e^{2x}(1-(n+1)-2x) \end{aligned}$$

إذن  $P_{n+1}$  صحيحة ومنه  $P_n$  صحيحة من أجل كل  $n \geq 1$

$$(1) \quad f^{(n+1)}(x) = 0 \text{ يكافئ } -n-2x = 0 \text{ يكافئ } x = -\frac{n}{2}$$

$$\text{إذن } x_n = x = -\frac{n}{2}$$

$$y_n = f^{(n)}(x_n) = 2^n(1-n+n)e^{-n} = 2^n \times e^{-n}$$

$$\text{إذن } x_n = -\frac{n}{2} \text{ و } y_n = 2^n \times e^{-n}$$

$$\text{بوضع } x_n = x \text{ و } y_n = y \text{ نجد } n = -2x \text{ و } y = 2^{-2x}e^{2x} = \frac{e^{2x}}{4^x}$$

إذن  $M_n$  تنتمي إلى المنحني ذي المعادلة  $y = \frac{e^{2x}}{4^x}$

$$(ب) \text{ يمان } x_{n+1} - x_n = -\frac{(n+1)}{2} + \frac{n}{2} = -\frac{1}{2}$$

فإن  $(x_n)$  متتالية حسابية أساسها  $-\frac{1}{2}$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$

$$(ج) \text{ يمان } y_n = \left(\frac{2}{e}\right)^n \text{ فإن } (y_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } \frac{2}{e} \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$$

### تطبيق 24

### حساب نهاية متتالية باستعمال الدوال

من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$  نعرف على  $I = [0, 1]$  الدالة f بـ

$$f(x) = -e^{-x} \left[ 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right]$$

(1) احسب  $f'(x)$  ثم بين أنه من أجل كل x من I يكون  $f'(x) \geq 0$

(2) استنتج أن  $f(1) \geq f(0)$

(3) باستعمال تغيرات g المعرفة على I بـ  $g(x) = f(x) - \frac{x}{n!}$

$$\text{بين أن } f(1) \leq f(0) + \frac{1}{n!}$$

$$(4) \text{ استنتج أن } e \left(1 - \frac{1}{n!}\right) \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq e$$

$$(5) \text{ بين أن } 0 \leq e - V_n \leq \frac{3}{n!} \text{ حيث } V_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$



(7) حتى يكون  $e - V_n \leq 10^{-4}$  يجب أن يكون  $\frac{3}{n!} \leq 10^{-4}$

بما أن  $\frac{3}{n!} \leq \frac{3}{2^{n-1}}$  فإن  $\frac{3}{2^{n-1}} \leq 10^{-4}$  حيث  $2^{n-1} \geq 3 \times 10^4$

ومنه ينتج  $(n-1) \ln 2 \geq \ln(3 \times 10^4)$

إذن  $n \geq \frac{\ln(3 \times 10^4)}{\ln 2} + 1$  أي  $n \geq 15,80$

وبالتالي قيمة  $n_0$  هي  $n_0 = 16$ .

### حل معادلات تفاضلية

لتكن المعادلة التفاضلية (E)  $y' = y(1-y)$ . نريد إيجاد حلول (E) التي لا

تتعدم على  $\mathbb{R}$  لذلك نضع  $z = \frac{1}{y}$

(1) تحقق أن  $z' = -z + 1$  (E')

(2) بين أن حلول (E') هي النوال  $x \mapsto 1 + ce^{-x}$  حيث  $c \in \mathbb{R}$ .

(3) استنتج حلول المعادلة (E).

✓ الحل

$$z' = -\frac{y'}{y^2} = -\frac{y(1-y)}{y^2} = \frac{y-1}{y} = 1 - \frac{1}{y} = 1 - z \quad (1)$$

(2) حلا للمعادلة (E') يعني أن  $f'(x) = -f(x) + 1$

$$f'(x) = -ce^{-x} + 1 - 1 = -(1 + ce^{-x}) + 1 = -f(x) + 1$$

إذن  $x \mapsto 1 + ce^{-x}$  حلا للمعادلة (E').

$$z = \frac{1}{y} \quad \text{منه} \quad y = \frac{1}{z} \quad \text{إذن} \quad y = \frac{1}{1 + ce^{-x}} \quad (3)$$

### حل معادلة تفاضلية من الشكل $y' + ay = f(x)$

لتكن (E) معادلة تفاضلية بحيث  $y' + 4y = 3xe^{2x}$  ولتكن (E') معادلة

تفاضلية  $y' + 4y = 0$ .

(1) حل المعادلة (E')

(2) عين العددين الحقيقيين  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$ .

ب  $g(x) = (\alpha x + \beta)e^{2x}$  حلا خاص للمعادلة (E).

(6) عين نهاية المتتالية  $(V_n)$ .

(7) عين  $n_0$  بحيث من أجل  $n \geq n_0$  يكون  $e - V_n \leq 10^{-4}$

استعمل للتباينة  $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

✓ الحل

$$f'(x) = e^{-x} \left[ 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right] + \left[ 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right] (-e^{-x}) = e^{-x} \left[ \frac{x^n}{n!} \right] \quad (1)$$

$$1 \geq x^4 \geq 0 \quad \dots \quad (2) \quad , \quad 1 \geq e^{-x} \geq \frac{1}{e} \quad \dots \quad (1)$$

بالضرب حدود المتباينتين (1) و (2) طرفا لطرف نجد  $1 \geq e^{-x} x^n \geq 0$

$$1 \geq e^{-x} x^n \geq 0 \quad \dots \quad (4) \quad , \quad 1 \geq \frac{1}{n!} \quad \dots \quad (3)$$

بالضرب حدود المتباينتين (3) و (4) طرفا لطرف نجد  $1 \geq \frac{e^{-x} x^n}{n!} \geq 0$  أي  $f'(x) \geq 0$

(2) بما أن  $f'(x)$  موجب على  $I$  فإن  $f$  متزايدة تماما على  $I$  وعليه  $f(0) \leq f(1)$

$$(3) \text{ لدينا } g'(x) = \frac{1}{n!} (e^{-x} x^n - 1)$$

بما أن  $0 \leq e^{-x} x^n \leq 1$  فإن  $-1 \leq e^{-x} x^n - 1 \leq 0$  وبالتالي  $g'(x) < 0$

إذن  $g$  متناقصة تماما على  $I$  وعليه  $g(0) > g(1)$ .

$$g(1) < g(0) \text{ تعني } f(1) - \frac{1}{n!} \leq f(0) \text{ أي } f(1) \leq f(0) + \frac{1}{n!}$$

$$-1 \leq -e^{-1} \left( 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \leq -1 + \frac{1}{n!} \text{ ومنه نجد } f(0) \leq f(1) \leq f(0) + \frac{1}{n!} \quad (4)$$

بضرب حدود هذه المتباينة في  $-e$  نجد  $e \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \geq e \left( 1 - \frac{1}{n!} \right)$

$$(5) \quad V_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

بما أن  $V_n \leq e$  فإن  $e - V_n \geq 0$ .

لدينا من السؤال الرابع المتباينة  $V_n \geq e \left( 1 - \frac{1}{n!} \right)$  بضرب طرفيها في  $-1$  نجد:

$$e - V_n \leq \frac{e}{n!} \leq \frac{3}{n!} \text{ وبإضافة } e \text{ إلى طرفي هذه الأخيرة نجد}$$

$$\frac{3}{n!} \geq e - V_n \geq 0$$

$$(6) \text{ بما أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n!} = 0 \text{ فإن حسب نظرية الحصر نجد } \lim_{n \rightarrow +\infty} (e - V_n) = 0$$

$$\text{إذن } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = e$$



✓ الحل

(1)  $y' + 4y = 0$  يكافئ  $y' = -4y$  وحلها العام هو  $y = \lambda e^{-4x}$  حيث  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

(2)  $g$  حلاً للمعادلة (E) هذا معناه أن  $g'(x) + 4g(x) = 3xe^{2x} \dots$

$g'(x) = ae^{2x} + 2(ax+b)e^{2x} = e^{2x}(2ax+a+2b)$

$g'(x) + 4g(x) = e^{2x}(2ax+a+2b+4ax+4b) = e^{2x}(3ax+a+3b) \dots$

من (1) و (2) نجد  $a+6b=0$  و  $6a=3$  ومنه ينتج  $a=\frac{1}{2}$  و  $b=-\frac{1}{12}$ .

إذن  $g(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\right)e^{2x}$ .

## تطبيق 27

حل معادلة تفاضلية من الشكل  $y' + y = f(x)$

(1) نريد حل المعادلة التفاضلية (E)  $y' + y = x+1 \dots$  حيث  $y$  دالة عددية ذات المتغير  $x$  و  $y'$  مشتقتها

(1) نضع  $z = y - x$  أكتب المعادلة التفاضلية (E) بدلالة  $z$  ولتكن (F).

(ب) حل المعادلة (F) ثم (E).

(2) نسمي  $f_\alpha$  حل للمعادلة (E) بحيث  $f_\alpha(0) = \alpha$  و  $(y_\alpha)$  التمثيل البياني للدالة  $f_\alpha$  حيث  $\alpha$  عدد حقيقي معطى.

(أ) ادرس تغيرات  $f_\alpha$  في كل حالة من الحالات  $\alpha > 0$ ،  $\alpha = 0$ ،  $\alpha < 0$ .

(ب) بين أنه من أجل كل  $\alpha$ ، المماس لـ  $(y_\alpha)$  عند النقطة ذات الفاصلة -1 يمر من النقطة  $(0, 0)$ .

(ج) بين أن كل المماسات للمنحنيات  $(y_\alpha)$  عند النقطة ذات الفاصلة  $x_0$  تقطع  $(y_0)$  في نقطة وحيدة يطلب تعيينها مع  $\alpha \neq 0$ .

✓ الحل

(1)  $z' = y' - 1$  ومنه  $y' = z' + 1$

إذن (E) تكتب  $z' + 1 + z + x = x + 1$  أي  $z' + z = 0$  ومنه  $z' + z = 0$  (F)

(ب) الحل العام للمعادلة (F) هو  $z = \lambda e^{-x}$  حيث  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

وبالتالي الحل العام للمعادلة (E) هو  $y = \lambda e^{-x} + x$

$f_\alpha(0) = \alpha$  يكافئ  $\lambda e^0 + 0 = \alpha$  أي  $\lambda = \alpha$

إذن  $f_\alpha(x) = \alpha e^{-x} + x$

(1)  $f'_\alpha(x) = -\alpha e^{-x} + 1 = \frac{-\alpha + e^x}{e^x}$

## تطبيق 28

حل معادلة تفاضلية من الشكل  $y'' + \omega y' = 0$

نعتبر المعادلة التفاضلية (E)  $y'' + 4y' = 0 \dots$

(1) بوضع  $g = f'$  بين أن  $g$  حلاً للمعادلة (E')  $g' + 4g = 0$  ثم حل (E').

(2) استنتج أن حلول (E) هي الدوال  $\frac{a}{4}e^{-4x} + b$  مع  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان كيفيان.

(3) من بين الحلول  $f$  عين الحل الذي يحقق  $f(0) = 0$  و  $f\left(-\frac{1}{4}\right) = 2$

- في حالة  $\alpha > 0$  لدينا  $f'_\alpha(x) = 0$  يكافئ  $\alpha = e^x$  يكافئ  $x = \ln(\alpha)$   
إذا كان  $\ln(\alpha) < x$  فإن  $f'_\alpha(x) > 0$  وإذا كان  $\ln(\alpha) > x$  فإن  $f'_\alpha(x) < 0$   
- في حالة  $\alpha < 0$  يكون  $f'_\alpha(x) > 0$  منه  $f_\alpha$  متزايدة تماماً على  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$\ln \alpha$	$+\infty$
إشارة $f'_\alpha(x)$	-	0	+
تغيرات $f_\alpha$	$+\infty$	$1 + \ln \alpha$	$+\infty$

حالة  $\alpha > 0$

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $f'_\alpha(x)$		+	
تغيرات $f_\alpha$	$-\infty$		$+\infty$

حالة  $\alpha < 0$

في حالة  $\alpha = 0$  يكون  $f'_\alpha(x) = 1$  ومنه  $f_\alpha(x) = x$  ومنه  $f_\alpha(x) = x$  في هذه الحالة هو مستقيم معادلته  $y = x$

(ب) المماس لـ  $(y_\alpha)$  عند النقطة ذات الفاصلة -1 هو  $y = (-\alpha e + 1)x$  ومنه هذا المماس يمر من البدا  $(0, 0)$ .

(ج) المماسات لـ  $(y_\alpha)$  عند النقطة ذات الفاصلة  $x_0$  معادلته هي

$$y = \left(\frac{-\alpha + e^{x_0}}{e^{x_0}}\right)(x - x_0) + \alpha e^{-x_0} + x_0$$

المماسات تقطع  $(y_0)$  في نقطة وحيدة هذا معناه المعادلة

$$(*) \quad x = \left(\frac{-\alpha + e^{x_0}}{e^{x_0}}\right)(x - x_0) + \alpha e^{-x_0} + x_0 \dots$$

من (\*) نجد  $x = x_0 + 1$  ومنه  $y = x = x_0 + 1$

إذن كل المماسات لـ  $(y_\alpha)$  عند النقطة ذات الفاصلة  $x_0$  تقطع  $(y_0)$  في نقطة وحيدة

$M_0(x_0 + 1, x_0 + 1)$  مستقلة عن  $\alpha$ .



✓ الحل

(1) بما أن  $g = f'$  فإن  $f'' = g' = 0$  بتعويض  $f'$  و  $f''$  في (E) نجد  $g' + 4g = 0$  أي  $g$  حلال (E).

(2) الحل العام للمعادلة (E)  $g(x) = ae^{-4x}$  حيث  $a$  عدد حقيقي. حتى تكون  $f$  حلا للمعادلة (E) يجب أن يكون  $f'(x) = g(x)$

$$f'(x) = (-4)\left(-\frac{1}{4}\right)e^{-4x} = ae^{-4x} = g(x)$$

إذن حلول المعادلة (E) هي الدوال  $f$  المعرفة بـ  $f(x) = -\frac{a}{4}e^{-4x} + b$

(3)  $f(0) = 0$  يكافئ  $-\frac{a}{4} + b = 0$  ومنه  $b = \frac{a}{4}$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = 2 \text{ يكافئ } -\frac{a}{4}e + b = 2 \text{ ..... (1)}$$

بتعويض قيمة  $b$  في (1) نجد  $-\frac{a}{4}e + \frac{a}{4} = 2$  أي  $-\frac{a}{4}(e-1) = 2$

ومنه  $a = \frac{8}{-(e-1)}$  و  $b = \frac{2}{1-e}$  إذن الدالة المطلوبة هي  $x \mapsto \frac{-2}{1-e}e^{-4x} + \frac{2}{1-e}$

### تطبيق 29

ليكن  $C(t)$  التركيز بـ  $(mg/l)$  للدواء في الدم بدلالة الزمن  $t$  حيث  $t$  معبر عنه بالساعات. سرعة التخلص الجسم من هذا الدواء متناسبة مع كمية الدواء الباقية في الدم في تلك اللحظة. ثابت التخلص يساوي  $0,25$  التركيز الابتدائي هو  $5mg/l$ .

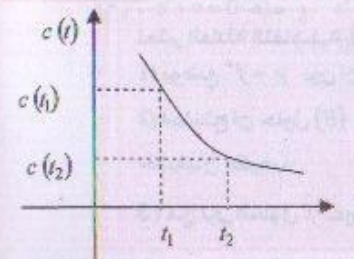
- برر المساواة  $C'(t) = -0,25C(t)$  ثم أوجد عبارة  $C(t)$ .
- أدرس تغيرات  $C$  وأحسب نهاية  $C(t)$  عند  $(+\infty)$  ثم أرسم بيان الدالة  $C$ .
- أعط حصرًا بتقريب  $0,01$  للحظة  $t_0$  التي ابتداء منها يكون  $C(t) < 2$ .

✓ الحل

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{C(t_2) - C(t_1)}{t_2 - t_1} = V_E(t_1) \quad (1)$$

$V_E(t_2)$  هي سرعة التخلص الدم من الدواء في اللحظة  $t_2$ .

سرعة التخلص  $V_E$  هي مشتقة التركيز  $C(t)$  أي  $C'(t) = V_E$



### الدالة الأسية

إن ثابت التخلص الجسم من الدواء هو معامل التناسب بين سرعة التخلص و التركيز في لحظة  $t$  و بما أن التركيز يتناقص فإن العامل يكون سالبا أي  $(-0,25)$

وعليه  $C'(t) = -0,25C(t)$  (E)

والحل العام للمعادلة (E)

$$C(t) = \alpha \times e^{-0,25t} \text{ هو}$$

حيث  $\alpha$  عدد حقيقي.

لما  $t=0$  فإن  $C(0)=5$

ومنه  $\alpha \times e^0 = 5$  أي  $\alpha = 5$

إذن  $C(t) = 5e^{-0,25t}$

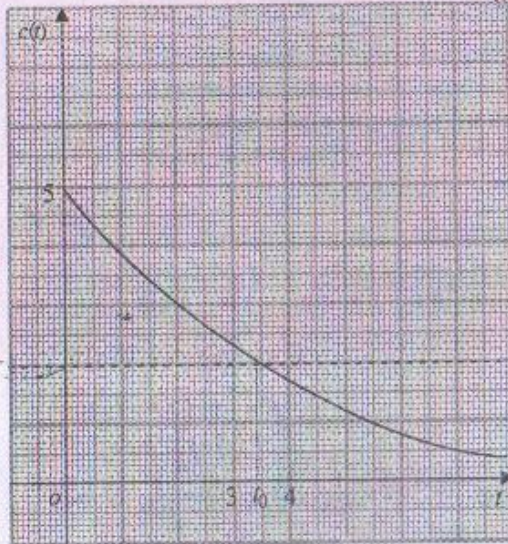
(2) بما أن  $C'(t) = -1,25e^{-0,25t}$

فإن  $C'(t) < 0$  وبالتالي الدالة  $C$

متناقصة تماما على  $[0, +\infty[$ .

و إليك جدول تغيرات  $C$

$t$	0	$+\infty$
$C'(t)$	-	-
$C(t)$	5	0



(3) نضع  $g(t) = C(t) - 2$  ومن المتبانية (2) نجد  $t \geq 3,66$

بما أن  $g'(t) < 0$  و  $g(t) = 0$  فإن المعادلة  $g(t) = 0$  لها حل وحيد  $t_0$  حيث

$t_0 > 3,66$  باستعمال طريقة السح بخطوة قدرها  $0,01$

نحصل على الجدول التالي.

إذن  $t_0 > 3,66$  و  $t_0 < 3,67$

$t$	$g(t)$
3,66	0,00258
3,67	-0,0024

### تطبيق 30

#### استعمال التناقص الأسى في دراسة تغير وسط بكتيري

يقوم عالم مختص في البكتيريا بملاحظة نمو مجتمع بكتيري في وسط مغلق. يقدر العدد الابتدائي لهذا المجتمع بـ 100 بكتيريا والقدرة الاستيعابية العظمى هي 1000 بكتيريا.

لتكن  $N(t)$  عدد البكتيريا في اللحظة  $t$  (معر عنها بالساعات).

الملاحظات المستخلصة قادتنا إلى نمذجة هذه الحالة بمعادلة تفاضلية

$$N'(t) = 0,07N(t)(1 - 10^{-3}N(t))$$



كل عدد حقيقي موجب  $t$  حيث  $k = 1,245 \times 10^{-4}$  و  $N(0) = N_0$

نقول أن سرعة تحلل  $C^{14}$  متناسبة مع عدد ذرات  $C^{14}$  الموجودة في تلك اللحظة

(1) أوجد  $N(t)$  بدلالة  $N_0$  و  $t$

(2) ما هي نسبة ذرات الكربون  $C^{14}$  المفقودة خلال 10000 سنة ؟

(3) نسمي نصف حياة الكربون  $C^{14}$  الزمن المطلوب لاستحالة نصف عدد ذرات  $C^{14}$

(أ) يبرر العلاقة  $N(t+T) = \frac{1}{2} N(t)$  حيث  $T$  هو نصف حياة  $C^{14}$ .

(ب) استنتج أن  $T = \frac{\ln(2)}{k}$  معينا قيمة تقريبية له

(4) قام علماء الآثار بتحليل شظايا لعظام وجدت في كهف ، فوجدوا نسبة

الكربون  $C^{14}$  الموجودة في هذه العظام تمثل 20 % من نسبة الكربون  $C^{14}$

الووجودة في عينة عظام جديدة لها نفس الكتلة. أوجد عمر شظايا العظام.

✓ الحل

(1) الحل العام للمعادلة  $N'(t) = -k \times N(t)$  هو  $N(t) = \lambda e^{-kt}$

بما أن  $N(0) = N_0$  فإن  $\lambda e^0 = N_0$  ومنه  $\lambda = N_0$  إذن  $N(t) = N_0 e^{-kt}$

(2) كمية الكربون في اللحظة  $t = 10000$  سنة هي  $N_1 = N_0 e^{-k \times 10000}$

نسبة الكربون  $C^{14}$  المفقودة خلال 10000 سنة هي  $\frac{N_1 - N_0}{N_0}$

$$\frac{N_1 - N_0}{N_0} = \frac{N_0 e^{-k \times 10000} - N_0}{N_0} = e^{-k \times 10000} - 1 = -0,712$$

إذن نسبة الكربون المفقودة خلال 10000 سنة هي 71,2 %

(3)  $N(t+T) = N_0 e^{-k(t+T)} = N_0 e^{-kt} \times e^{-kT} = N(t) \times e^{-kT}$  (1)

بما أن  $N(T) = \frac{1}{2} N_0$  فإن  $N_0 e^{-kT} = \frac{1}{2} N_0$  أي  $e^{-kT} = \frac{1}{2}$

إذن (\*)  $N(t+T) = N(t) \times \frac{1}{2}$  ....

(ب) بوضع  $t = 0$  العلاقة (\*) تصبح  $N_0 e^{-kT} = N_0 \times \frac{1}{2}$  ومنه نستنتج أن  $e^{-kT} = \frac{1}{2}$

من المساواة  $e^{-kT} = \frac{1}{2}$  نجد  $T = \frac{\ln(2)}{k}$  بتعويض قيمة  $k$  نجد  $T \approx 5567,45$

أي تقريبا 5568 سنة.

(4) لدينا 20 %  $\frac{N(t)}{N_0} = 0,20$  ومنه  $N(t) = N_0 \times 0,20$

$N_0 e^{-kt} = N_0 \times 0,2$  تكافئ  $e^{-kt} = 0,2$  تكافئ  $-kt = \ln(0,2)$

ومنه نجد  $t = \frac{\ln(0,2)}{-k}$  وبالحساب نجد  $t \approx 12927$ .

نضع  $P(t) = \frac{1}{N(t)}$  مع  $N(t) \neq 0$

(1) بين أن الدالة  $P$  تحقق للمعادلة التفاضلية  $P' = -0,07 P + 7 \times 10^{-3}$

(2) استنتج عبارة  $P(t)$  ثم  $N(t)$  بدلالة  $t$ .

(3) ما هو عدد البكتريا بعد 40 ساعة ؟

(4) ما هو الوقت اللازم حتى يصبح عدد البكتريا يمثل 80 % من الاستيعابية العظمى لهذا الوسط ؟

✓ الحل

$$P' = \frac{-N'(t)}{N^2(t)} = \frac{-0,07 N(t) (1 - 10^{-3} \times N(t))}{N^2(t)} = \frac{-0,07 (1 - 10^{-3} N(t))}{N(t)} \quad (1)$$

$$P' = -\frac{0,07}{N(t)} + 0,07 \times 10^{-3}$$

$$P' = -0,07 P + 7 \times 10^{-3}$$

$$P(t) = 10^{-3} + c e^{-0,07t} \quad (2)$$

وبما أن  $P(0) = \frac{1}{100}$  فإن  $10^{-3} + c = \frac{1}{100}$  وبالتالي  $c = 9 \times 10^{-3}$

إذن  $P(t) = 10^{-3} (1 + 9 e^{-0,07t})$  و  $N(t) = \frac{1000}{1 + 9 e^{-0,07t}}$

(3) بما أن  $N(40) = 647$  فإن بعد 40 ساعة عدد البكتريا يصبح 647.

(4) 80 % من البكتريا يعادل 800 بكتريا

$N(t) = 800$  يكافئ  $t = 51,19$

إذن عدد الساعات هي تقريبا 51 ساعة.

تحويل الأوزت بالهواء الجوي إلى الكربون المشع

تطبيق 31

يحتوي الغلاف الجوي على مادة الأوزت والتي بفعل الإشعاعات الكونية تتحول

إلى مادة الكربون المشع ( $C^{14}$ )، وتحتوي الكائنات الحية على هذه المادة التي

تتجدد على الدوام وعند موتها فإن مادة الكربون  $C^{14}$  تتحلل تدريجيا

(تتناقص في الوسط).

لمعرفة زمن وفاة كائن نقوم بقياس نسبة الكربون  $C^{14}$  المتبقية في جسمه.

لتكن  $N(t)$  عدد ذرات  $C^{14}$  الموجودة في اللحظة  $t$  العمر عنها بالأعوام في

عينة من مادة عضوية.

بين الفيزيائيون أن الدالة  $N$  تحقق للمعادلة  $N'(t) = -k \times N(t)$  من أجل



## تمارين و مسائل

1-

حل المعادلات التالية :

$$\begin{aligned} (1) \quad e^{x-3} &= 1 \quad (2) \quad e^{4x^2+6} = e^{14x} \quad (3) \quad e^x - e^{-2x} = 0 \\ (4) \quad (e^{-2x} - e)(e^{6x} + 5) &= 0 \quad (5) \quad \ln(e^x - 4) = 5 \quad (6) \quad \frac{e^{2x} + 2e^x - 4}{3e^x - 2} = 1 \\ (7) \quad e^x - 2e^{-\frac{x}{2}} - 5 &= 0 \quad (8) \quad e^{2x} = 2e^{-x} \quad (9) \quad e^{4x} - 3e^{2x} + 2 = 0 \\ (10) \quad e^{-x} + e^x + 2 &= 0 \quad (11) \quad e^{3x} - (e^2 - 1)e^{2x} = e^{x+3} \end{aligned}$$

2-

- (1) عين جذور كثير الحدود  $P(x) = 2x^2 + 9x - 5$  حيث  $P(x)$  مستنتجا تحليلا له.
- (2) ادرس إشارة كل من  $(e^x + 5)$  و  $(2e^x - 1)$
- (3) باستعمال الأسئلة السابقة حل التراجحة  $2e^{2x} + 9e^x - 5 > 0$

3-

حل المعادلات و التراجحات التالية :

$$\begin{aligned} (1) \quad 2 - e^x &\geq 0 \quad (2) \quad e^{2x^2-1} \geq 3 \quad (3) \quad (e^x)^2 \leq 4 \\ (4) \quad e^x - 2e^{-x} &< 0 \quad (5) \quad (e^x - 1)e^x \geq 2(e^x - 1) \quad (6) \quad 3e^{2x} + e^x - 4 < 0 \\ (7) \quad \frac{e^x - 3}{e^{2x} + 3} &\leq \frac{e^x - 4}{e^x + 4} \quad (8) \quad e^{x+1} > 2^x \quad (9) \quad e^{|x-1|} \geq 1 \quad (10) \quad 2^{2x} + 2^{x+1} - 3 > 0 \\ (11) \quad 2^{x+2} - 10 \times 2^{x+1} + 12 &= 0 \quad (12) \quad 3^x + 2 \times 3^{-x-1} = 7 \quad (13) \quad 4^x + 2^{x+1} - 3 \leq 0 \end{aligned}$$

4-

حل في  $\mathbb{R}^2$  الجمل التالية :

$$\begin{aligned} (1) \quad \begin{cases} x^y = 14 \\ e^x e^y = e \end{cases} \quad (ب) \quad \begin{cases} e^{x+y} + e^{xy} = 2e^4 \\ \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (ج) \quad \begin{cases} e^x - \frac{1}{e} e^y = 1 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases} \end{aligned}$$

5-

احسب نهايات الدالة  $f$  عند  $(+\infty)$  و  $(-\infty)$  في كل حالة من الحالات التالية :

$$\begin{aligned} (1) \quad f(x) &= x + 3 + x e^x \quad (ب) \quad f(x) = x + 2 + \frac{5}{e^x + 1} \quad (ج) \quad f(x) = \frac{e^x - 3}{e^x + 2} \\ (د) \quad f(x) &= \frac{5x - 2}{e^x + 2} \quad (هـ) \quad f(x) = \frac{e^x}{x - 2} \quad (و) \quad f(x) = \frac{3x + 1}{x} e^x \end{aligned}$$

6-

ادرس نهاية الدالة  $f$  في المكان المعطى في كل حالة من الحالات التالية :

$$\begin{aligned} (1) \quad f(x) &= \frac{e^x - 2}{3x} \quad \text{عند } 0 \quad (ب) \quad f(x) = 5x e^{-x} \quad \text{عند } +\infty \\ (ج) \quad f(x) &= \frac{3e^x - 3}{3x - 3} \quad \text{عند } (+\infty) \text{ و } (-\infty) \quad (د) \quad f(x) = \frac{e^x - 1}{x e^x + 1} \quad \text{عند } (+\infty) \\ (هـ) \quad f(x) &= e^{2x} - e^x + 1 \quad \text{عند } (+\infty) \text{ و } (-\infty) \\ (و) \quad f(x) &= \frac{x + 1}{x} e^{\frac{1}{x}} \quad \text{عند } 0 \text{ و } (+\infty) \text{ و } (-\infty) \\ (ي) \quad f(x) &= \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x + 3\sqrt{x}} \quad \text{عند } 0 \quad (ف) \quad f(x) = \frac{e^{4x} - 2e^{2x} + 1}{4x^2} \quad \text{عند } 0 \end{aligned}$$

7-

$f$  دالة معرفة على  $[0, +\infty[$  بالعلاقة  $f(x) = 20x - 600 - e^{-0.5x+1}$

- (1) عين نهاية  $f$  عند  $(+\infty)$ .
- (2) بين أن المستقيم  $(d)$  ذا المعادلة  $y = 20x - 600$  مقارب مائل لمنحنى الدالة  $f$  وليكن  $(y)$
- (3) ادرس الوضعية النسبية لـ  $(y)$  بالنسبة إلى  $(d)$

8-

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = x - 1 - 2e^x$

- (1) ادرس نهاية  $f$  عند  $(-\infty)$
- (ب) بين أن المستقيم  $(d)$  ذا المعادلة  $y = x - 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(y)$  الممثل لـ  $f$ .
- (2) ادرس الوضع النسبي لـ  $(y)$  بالنسبة إلى  $(d)$ .

(3) بين أنه نستطيع كتابة  $f(x)$  على الشكل  $f(x) = e^x \left( \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} - 2 \right)$

ثم استنتج نهاية  $f$  عند  $(+\infty)$ .

9-

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \ln(e^x + 2)$  و  $(y)$  منحناها البياني في معلم.

- (1) ادرس نهاية  $f$  عند  $(-\infty)$  و  $(+\infty)$



- (2) بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  يكون  $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-x})$  ثم استنتج أن  $(\gamma)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا  $(d)$  في جوار  $(+\infty)$ .  
(3) ادرس الوضع النسبي لـ  $(\gamma)$  بالنسبة إلى  $(d)$ .

-10-

عين الدالة المشتقة لكل دالة من الدوال المعطاة مع تعيين المجموعة التي تكون فيها الدالة قابلة للاشتقاق.

$$(1) f(x) = x^3 e^x \quad (2) f(x) = \frac{e^x}{x-2}$$

$$(3) f(x) = 2 + \frac{e^x}{e^x - 1} \quad (4) f(x) = (3x+5)e^x$$

$$(5) f(x) = (\sin x)e^x \quad (6) f(x) = (-3x^2 + 2x)e^{-x}$$

$$(7) f(x) = e^{-x} - \sqrt{x} + 2 \quad (8) f(x) = e^{x^2+3x+2}$$

$$(9) f(x) = \frac{e^{3x+1}}{x+3} \quad (10) f(x) = \frac{3x+1}{e^{x+2}}$$

$$(11) f(x) = (\cos x)e^{\frac{1}{x}} \quad (12) f(x) = (x-1)e^{x^2}$$

-11-

عين في كل حالة من الحالات التالية مجموعة تعريف الدالة  $f$  و المجموعة التي تكون فيها  $f$  قابلة للاشتقاق ثم احسب  $f'(x)$

$$(1) f(x) = e^{\cos x} \quad (2) f(x) = e^{\frac{1}{1+x}} \quad (3) f(x) = e^{x+|x|}$$

$$(4) f(x) = e^{x+\sin x} \quad (5) f(x) = \ln(e^x + |x|) \quad (6) f(x) = \frac{e^{-|x|}-2}{e^x}$$

-12-

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = (2-x)e^x$  ما مصداقية المعلومات التالية ؟  
(1) جدول تغيرات  $f$  هو :

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
تغيرات $f$		$e$	

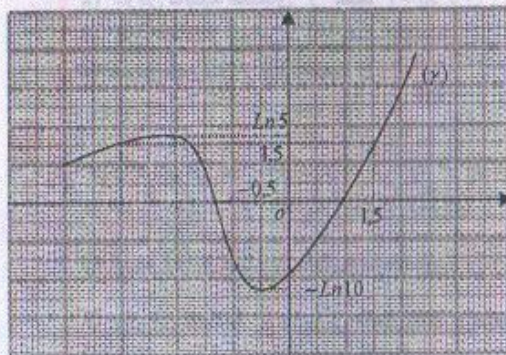
- (2) من أجل كل عدد حقيقي  $m > 0$  و  $m \neq e$  المعادلة  $f(x) = m$  تقبل حلان أو ولا حل  
(3) المستقيم ذو المعادلة  $y=0$  مقارب للمنحنى الممثل لـ  $f$ .

-13-

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = ax + b - \frac{4e^x}{e^x + 2}$  و ليكن  $(\gamma)$  منحنىها البياني في معلم متعامد ومتجانس ،  $A$  نقطة إحداثيها  $(\ln(2), \ln(2))$   
(1) أوجد  $a$  و  $b$  بحيث  $(\gamma)$  يمر من  $A$  و يقبل عندها مماسا موازيا لمحور القواصل.  
(2-1) ادرس تغيرات الدالة المحصل عليها في السؤال (1).  
(ب) ارسم  $(\gamma)$  و المماس عند  $A$ .

-14-

$f$  دالة معرفة على  $[-4, +\infty[$  و منحنىها البياني  $(\gamma)$  في معلم متعامد ومتجانس



كما في الشكل  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) شكل جدول تغيرات  $f$ .

(2) عين تغيرات الدالة  $g$

المعرفة بـ  $g(x) = e^{f(x)}$

(ب) عين صور الأعداد  $-2, -4$

بالدالة  $g$   $-1, -\frac{1}{2}, 0, 1$

(ج) ما هي نهاية  $g$  عند  $(+\infty)$  ؟

(3) ارسم المنحنى البياني للدالة  $g$  في المعلم السابق

(4) حل بيانيا المعادلة  $f(x) = 0$  ثم للتراجحة  $f(x) \geq \frac{3}{2}$  ، ثم استنتج حلول المعادلة

$g(x) = 1$  و حلول التراجحة  $g(x) \geq e\sqrt{e}$ .

-15-

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = 2e^x - x - 2$

(1) عين نهاية  $f$  عند  $(+\infty)$  و  $(-\infty)$  ثم شكل جدول تغيرات  $f$ .

(2) استنتج من السؤال (1) أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلان  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث  $-1.6 \leq \alpha \leq -1.5$

(3) عين إشارة  $f(x)$  حسب قيم  $x$ .

-16-

ادرس تغيرات الدوال التالية ،

$$(1) f(x) = x e^x - 2 \quad (2) f(x) = x - 2 + e^x \quad (3) f(x) = \frac{e^x - 3}{e^x + 3}$$



- (1) عين نهاية  $f$  عند  $(+\infty)$  و  $(-\infty)$
- (2) حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $f(x) = 0$ .
- (3) أدرس تغيرات  $f$  ثم ارسم  $(\gamma)$
- (4) ناقش حسب قيم العدد الحقيقي  $m$  عدد حلول المعادلة ذات المجهول  $x$  التالية  $e^{2x} - e^x - 2 - m = 0$  جبريا و بيانيا.

- (1) دالة معرفة على  $]-1, +\infty[$  ب  $f(x) = \frac{e^x}{(1+x)^2}$  و  $(\gamma)$  منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- (1) عين نهاية  $f$  عند  $-1$  و  $(+\infty)$  ثم ماذا تستنتج حول المنحني  $(\gamma)$  ؟
- (2) احسب  $f'(x)$  من أجل كل  $x$  من  $]-1, +\infty[$  وبين ان إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $\frac{x-1}{x+1}$
- (3) شكل جدول تغيرات  $f$  ثم ارسم المنحني  $(\gamma)$ .

- (1) دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  ب  $f(x) = (x-e)e^{-x} + 1 - x$  و  $(\gamma)$  منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- (1) عين نهاية  $f$  عند  $(-\infty)$  و  $(+\infty)$
- (2) احسب  $f'(x)$  وبين ان لدينا  $f'(x) = e^{-x} h(x)$  حيث  $h$  دالة يطلب تعيينها.
- (3-1) ادرس حسب قيم  $x$  إشارة  $e - e^x$  ثم استنتج ان إذا كان :  
 $x > 1$  فإن  $1 - x + e - e^x < 0$  و  $x < 1$  فإن  $1 - x + e - e^x > 0$
- (ب) شكل جدول تغيرات  $f$  مستنتجا ان  $f(x)$  دوما سالبة.
- (4-1) بين ان المستقيم  $(d)$  ذو المعادلة  $y = 1 - x$  مقارب مائل لـ  $(\gamma)$  ثم ادرس الوضع النسبي لـ  $(\gamma)$  بالنسبة إلى  $(d)$ .
- (ب) بين انه توجد نقطة وحيدة  $A$  من  $(\gamma)$  بحيث المماس لـ  $(\gamma)$  عندها يوازي  $(d)$ .

- (1) دالة معرفة على مجال  $]0, +\infty[$  ب  $f(x) = \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$  و  $(\gamma)$  منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.
- (1)  $g$  دالة معرفة على  $]1, +\infty[$  ب  $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$
- (1) ما هي نهاية  $g(x)$  لـ  $x$  يؤول إلى 1 ؟

- (4)  $f(x) = \frac{x-3}{e^x}$
- (5)  $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$
- (6)  $f(x) = x - 2 + e^{-x}$
- (7)  $f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 2}$
- (8)  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

- (17)  $f$  دالة معرفة كَمَا يلي  $\begin{cases} f(x) = 2e^{x-1} - 1 & , x \leq 1 \\ f(x) = 1 + \ln x & , x > 1 \end{cases}$
- ( $\gamma$ ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس .
- (1) هل  $f$  مستمرة عند  $x_0 = 1$  ؟
- (2) ادرس قابلية اشتقاق  $f$  عند  $x_0 = 1$ .
- (3) عين معادلة المماس لـ  $(\gamma)$  عند النقطة  $A(1,1)$
- (4) ادرس تغيرات  $f$  ثم ارسم  $(\gamma)$ .

- (18)  $f$  دالة معرفة على  $[0, +\infty[$  ب  $f(x) = (2-x)e^x - 1$  و  $(\gamma)$  منحناها البياني.
- (1) ادرس تغيرات  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها.
- (2) ارسم  $(\gamma)$  في معلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- (3) بين ان المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  بحيث  $1 \leq \alpha \leq 2$  ثم عين قيمة تقريبية لـ  $\alpha$  بتقريب 0,01
- (4) ادرس إشارة  $f(x)$  حسب قيم  $x$ .

- (19)  $g$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  ب  $g(x) = xe^x - 1$
- (1-1) ادرس تغيرات  $g$  ثم استنتج انه يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha$  بحيث  $\alpha e^\alpha = 1$
- (ب) اعط حصرا لـ  $\alpha$  بتقريب 0,1.
- (2) لتكن  $f$  دالة معرفة على  $]0, +\infty[$  ب  $f(x) = e^x - \ln x$
- (1) تحقق انه من أجل كل  $x > 0$  يكون  $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$
- (ب) ادرس تغيرات  $f$  ثم ارسم  $(\gamma)$  التمثيل البياني لها في معلم متعامد و متجانس.

- (20)  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  ب  $f(x) = e^{2x} - e^x - 2$  و  $(\gamma)$  منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$



تنتمي على التوالي إلى محور الفواصل ، للمستقيم (d) و المنحني (v) ، وليكن  $U_n$  عدد

$$U_n = \frac{C_n A_n}{A_n B_n}$$

$$U_n = \frac{2n-5-f(n)}{2n-5} \text{ لدينا } n \geq 3$$

(ب) ما هي طبيعة المتتالية  $(U_n)$  ؟  
(ج) احسب نهاية المتتالية  $(U_n)$  لا  $+\infty \leftarrow n$  هل نستطيع تكهن هذه النتيجة من قبل ؟

$$f(x) = e^{-x} \sin 2x$$

(1) احسب  $f'(x)$  .  
(2) بين أن حلول  $f'(x) = 0$  تمثل متتالية حسابية وأن صورها بالدالة  $f$  تشكل متتالية هندسية .

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x+1}}, \quad x \neq -1$$

(1) ادرس استمرارية وقابلية اشتقاق  $f$  عند  $-1$  .  
(2) ادرس تغيرات  $f$  ثم ارسم (v) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس .

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x+3)e^{\frac{x+1}{x+3}} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{\sin x}} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3}-1}{(\sin x)^3} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^{x+1}} \right) \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - e^x + 1}{x^2} \quad (4)$$

$$f(x) = x^2 e^x$$

(1)  $f(0)$  ،  $f(2)$  ،  $f^{(n)}$  هي مشتقات متتالية لـ  $f$  من  $n \geq 1$  .

(1) احسب من أجل كل  $x$  :  $f^{(1)}(x)$  ،  $f^{(2)}(x)$  ،  $f^{(3)}(x)$  .

(2) بين بالتراجع أنه من أجل  $n \geq 1$  لدينا  $f^{(n)}(x) = e^x (x^2 + \alpha_n x + \beta_n)$  حيث  $\alpha_n$  و  $\beta_n$  عدنان حقيقيان يطلب تعيينهما .

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_n + 2 \\ \beta_{n+1} = \beta_n + \alpha_n \end{cases} \text{ تحقق أن}$$

(ب) احسب  $g'(x)$  من أجل كل  $x > 1$  .

(ج) حل المتراجحة  $0 < 1 - \ln(x-1)$  على  $]1, +\infty[$

(د) ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$  .

(هـ) بين أن للمعادلة  $g(x) = 0$  حل وحيد  $\alpha$  على المجال  $[e+1, e^3+1]$  و ادرس إشارة  $g(x)$  حسب قيم  $x$  .

$$h(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x} \text{ بـ } ]1, +\infty[$$

(1) عين نهاية  $h(x)$  لا  $x$  يؤول إلى 1 و بين أن نهاية  $h(x)$  لا  $x \leftarrow +\infty$  تساوي 0

(ب) احسب  $h'(x)$  و بين أن  $h'(x)$  من إشارة  $g(x^2)$  على المجال  $]1, +\infty[$

(ج) بين أن  $h$  متزايدة تماما على المجال  $[\sqrt{\alpha}, 1]$  و متناقصة تماما على  $] \sqrt{\alpha}, +\infty[$

(3-1) تحقق أنه من أجل كل  $x > 0$  يكون  $f(x) = h(e^x)$

(ب) - استنتج نهاية  $f(x)$  لا  $x$  يؤول إلى 0 و لا  $x$  يؤول إلى  $(+\infty)$

- استنتج اتجاه تغير  $f$  على المجال  $]0, +\infty[$

- استنتج أن  $f$  تقبل قيمة حدية عظمى عند  $\ln(\sqrt{\alpha})$  ثم ارسم (v) .

$$g(x) = 2e^x + 2x - 7$$

(1) ادرس نهاية  $g$  عند  $-\infty$  و  $(+\infty)$

(2) ادرس اتجاه تغير  $g$  على  $\mathbb{R}$  مشكلا جدول تغيراتها .

(3-1) بين أن للمعادلة  $g(x) = 0$  حل وحيد  $\alpha$  حيث  $\alpha \in ]0, 94, 0, 941[$

(ب) عين إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$  .

(II)  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = (2x-5)(1-e^{-x})$  و (v) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس .

(1) ادرس إشارة  $f(x)$  على  $\mathbb{R}$

(2) ادرس نهاية  $f$  عند  $(-\infty)$  و  $(+\infty)$

(3) احسب  $f'(x)$  و تحقق أن  $f'(x)$  و  $g(x)$  لهما نفس الإشارة مشكلا جدول تغيرات  $f$  .

$$f(\alpha) = \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$$

(4-1) بين صحة المساواة التالية

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة  $h$  المعرفة بـ  $h(x) = \frac{(2x-5)^2}{2x-7}$  على المجال  $]-\infty, \frac{5}{2}[$

(ج) استنتج حصرا لـ  $f(\alpha)$  بتقريب 0,01 .

(د) بين أن المستقيم (d) ذو المعادلة  $y = 2x - 5$  مقارب لـ (v) عند  $(+\infty)$  محددا وضعية (v) بالنسبة إلى (d) ثم ارسم (d) و (v) في نفس العلم .

(III) من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 3$  نعتبر النقط  $A_n$  ،  $B_n$  و  $C_n$  ذات الفاصلة  $n$  ،



- (4) تحقق أن  $(\alpha_n)$  هي متتالية حسابية يطلب تعيين  $\alpha_n$  بدلالة  $n$ .  
 (5) بين أنه من أجل كل  $n \geq 1$  يكون  $\beta_n = \alpha_n + \alpha_{n-1} + \dots + \alpha_2 + \alpha_1$  ثم احسب  $\beta_n$  بدلالة  $n$ .

(E) معادلة تفاضلية  $2y' + 3y = 0$  ... (E)

- (1) عين كل حلول المعادلة (E).  
 (2)  $(E')$  هي المعادلة التفاضلية  $2y' + 3y = x^2 + 1$ .  
 (أ) عين  $f$  دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية حلال لـ  $(E')$ .  
 (ب) بين أنه إذا كانت  $g$  حلال لـ  $(E')$  فإن  $g - f$  حلال لـ  $(E)$  والعكس صحيح.  
 (ج) أوجد كل حلول المعادلة  $(E')$ .  
 (3) أوجد كل حلول المعادلة  $2y' + 3y = \cos x$  الشكل  $h(x) = a \cos x + b \sin x$  (البحث عن الحل من الشكل).

عين الحل  $f$  للمعادلات التفاضلية المقترحة :

- (أ)  $y' = -3y$  و  $f(0) = 2$  ، (ب)  $2y' + 5y = 0$  و  $f(1) = 0$   
 (ج)  $y - 2y' = 0$  و  $f'(1) = 1$  ، (د)  $y' = -3y + 1$  و  $f(1) = 0$

(E) معادلة تفاضلية بحيث  $y' = -y + 4$

- (1) عين الحل  $f$  لـ  $(E)$  بحيث  $f(0) = 2$   
 (2) أرسم المنحنى الممثل لـ  $f$  على  $[0, 2]$  في معلم متعامد ومتجانس.  
 (3) أرسم في نفس المعلم تمثيلا مقربا لبيان  $f$  بواسطة طريقة أولر .

(E) معادلة تفاضلية بحيث  $y' - 3y = +2$

- بين صحة أو خطأ كل قضية من القضايا التالية :  
 (1) المعادلة (E) تقبل الدوال  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = ce^{3x} + 2$  مع  $c \in \mathbb{R}$  حلول لها.  
 (2) الحل الخاص لـ  $(E)$  بحيث  $f(0) = 2$  هو  $f(x) = \frac{1}{3}(5e^{3x} - 2)$   
 (3) الحل الخاص  $g$  للمعادلة (E) الذي منحناه البياني يقبل مماسا معامل توجيهه 3 عند النقطة ذات الفاصلة 0 المرفق بـ  $g(x) = -\frac{2}{3} + e^{3x}$   
 (4) المعادلة (E) تقبل الدوال  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = ce^{3x} + 2x$  كحلول لها.

(E) معادلة تفاضلية معرفة بـ  $y' + y = x + 1$

- نبحث عن الحل  $g$  المعروف بـ  $g(x) = ax + b$  للمعادلة (E)  
 (1) بين أنه إذا كانت  $g$  حلال لـ (E) فإنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  يكون :  
 $ax + a + b = x + 1$  عندئذ عين  $a$  و  $b$ .  
 (2) تحقق أن الدالة  $g$  المتحصل عليها هي حل لـ (E).  
 (3) بين أن الدالة  $f$  حل للمعادلة (E) إذا و فقط إذا كانت  $f - g$  حلا لـ  $y' + y = 0$  ... (E')  
 (4) حل المعادلة (E') ثم (E).

(E) معادلة تفاضلية معرفة بـ  $y' + y = 2(x+1)e^{-x}$

- (1) عين العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  بحيث الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  
 $g(x) = (ax^2 + bx)e^{-x}$  حلا للمعادلة (E)  
 (2) حل المعادلة (E') ...  $y' + y = 0$ .  
 (ب) بين أن الدالة  $f$  حل للمعادلة (E) إذا و فقط إذا كانت  $f - g$  حلال لـ (E)  
 (ج) استنتج كل حلول المعادلة (E).

عند حقن مريض بكمية  $A$  من دواء ما فإن الكمية المتبقية في الدم عند اللحظة  $t$  بعد

عملية التخلص الطبيعي هي  $Ae^{-\frac{t}{24}}$ . علما أن وحدة الزمن هي الساعة ( $h$ )، مبنا الأزمنة هي لحظة الحقن، وحدة الحجم هي  $(cm^3)$

- (1) ما هي كمية الدواء المتبقية بعد 8 ساعات من الحقن ؟  
 (2) نحقن هذا المريض بجرعة  $A$  كل 8 ساعات، مثل بيانها كمية الدواء الموجودة في الدم خلال 72 ساعة التي تلي الحقن الأول.  
 (3) يكون الدواء فعالا إذا و فقط إذا كان الدم يحتوي على كمية على الأقل تساوي  $3, 19A$ . باستعمال البيان السابق عين اللحظة التي ابتداء منها يصبح هذا الدواء فعال.

(1-4) بين أنه بعد الحقن رقم  $n$  تكون كمية الدواء الموجودة في الدم هي  $A \times \left( \frac{1 - e^{-\frac{n}{3}}}{1 - e^{-\frac{1}{3}}} \right)$

- (ب) أوجد بالحساب نتيجة السؤال (3).  
 (ج) عندما تصبح كمية الدواء في الدم أكبر من  $3, 46A$  فإن الدواء يصبح خطيرا. هل الاستمرار في وتيرة العلاج الطبية في (2) خطيرة أم لا ؟ إذا علمت أن مدة العلاج المحددة من طرف الطبيب هي 4 أيام ؟